はじめに

流石は東大，という問題が多いです…….

なんだかんだ言っても，日本の大学の最高峰．重箱の角をつつくようなケチな問題は出題されません．

問題文をちゃんと理解できるか，方針を適切に組み立てられるか，普通にほどほど高速に計算できるか，…という当たり前を問う問題が出題されているのです．

傾向対策とか予想問題だとか，目先に振り回されるような人にはこの講座は必要ありませんので，それっぽい授業を探し出して，しっかり振り回されて下さい．東大に受かる為の合格点が欲しい！　その為の当たり前のことちゃんと出来るようになりたい！　そのように考える人の為の講座です．

最後まで負けずに頑張りましょう!!

堺　義明

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

東京大学数学ⅠAⅡBⅢ対策講座

目　次

第１講　確率と漸化式 ―― p.4
第２講　整数問題 ―― p.12
第３講　図形と方程式 ―― p.20
第４講　通過領域 ―― p.28
第５講　数Ⅱの微積 ―― p.34
第６講　計算練習 ―― p.42
第７講　小道具の使い方 ―― p.50
第８講　基本なんだけど… ―― p.58
第９講　複素数，２次曲線 ―― p.64
第10講　数学Ⅲの微分 ―― p.70
第11講　数学Ⅲの積分 ―― p.76
第12講　求積問題 ―― p.84

※本テキストは，一部問題において東京大学の入試問題を改変して使用しております。詳細はテキストをご確認ください。

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

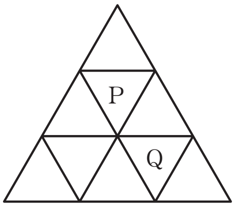
ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第１講　確率と漸化式

1　図のように，正三角形を９つの部屋に辺で区切り，部屋 P，Q を定める．１つの球が部屋 P を出発し，１秒ごとに，そのままその部屋にとどまることなく，辺を共有する隣の部屋に等確率で移動する．球が n 秒後に部屋 Q にある確率を求めよ．

《12 東大・理科文科》



ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　２つの箱ＬとＲ，ボール 30 個，コイン投げで表と裏が等確率 $\frac{1}{2}$ で出るコイン１枚を用意する．x を 0 以上 30 以下の整数とする．Ｌに x 個，Ｒに $30-x$ 個のボールを入れ，次の操作 (#) を繰り返す．

(#)　箱Ｌに入っているボールの個数を z とする．コインを投げ，表が出れば箱Ｒから箱Ｌに，裏が出れば箱Ｌから箱Ｒに，$K(z)$ 個のボールを移す．ただし，$0 \leqq z \leqq 15$ のとき $K(z)=z$，$16 \leqq z \leqq 30$ のとき $K(z)=30-z$ とする．

m 回の操作の後，箱Ｌのボールの個数が 30 である確率を $P_m(x)$ とする．たとえば $P_1(15)=P_2(15)=\frac{1}{2}$ となる．以下の問(1)，(2)，(3)に答えよ．

(1)　$m \geqq 2$ のとき，x に対してうまく y を選び，$P_m(x)$ を $P_{m-1}(y)$ で表せ．

(2)　n を自然数とするとき，$P_{2n}(10)$ を求めよ．

(3)　n を自然数とするとき，$P_{4n}(6)$ を求めよ．

《10 東大・理科文科(文科(2)まで)》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　どの目も出る確率が $\frac{1}{6}$ のさいころを1つ用意し，次のように左から順に文字を書く．

さいころを投げ，出た目が1，2，3のときは文字列AAを書き，4のときは文字Bを，5のときは文字Cを，6のときは文字Dを書く．さらに繰り返しさいころを投げ，同じ規則に従って，AA，B，C，Dをすでにある文字列の右側につなげて書いていく．

たとえば，さいころを5回投げ，その出た目が順に2，5，6，3，4であったとすると，得られる文字列はAACDAABとなる．このとき，左から4番目の文字はD，5番目の文字はAである．

(1)　n を正の整数とする．n 回さいころを投げ，文字列を作るとき，文字列の左から n 番目の文字がAとなる確率を求めよ．

(2)　n を2以上の整数とする．n 回さいころを投げ，文字列を作るとき，文字列の左から $n-1$ 番目の文字がAで，かつ n 番目の文字がBとなる確率を求めよ．

《15東大・理科(文科に類題)》

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

4　a を自然数（すなわち１以上の整数）の定数とする．
白球と赤球があわせて１個以上入っている袋Ｕに対して，次の操作（＊）を考える．
（＊）　袋Ｕから球を１個取り出し，
(i)　取り出した球が白球のときは，袋Ｕの中身が白球 a 個，赤球１個となるようにする．
(ii)　取り出した球が赤球のときは，その球を袋Ｕへ戻すことなく，袋Ｕの中身はそのままにする．

はじめに袋Ｕの中に，白球が $a+2$ 個，赤球が１個入っているとする．この袋Ｕに対して操作（＊）を繰り返し行う．

たとえば，１回目の操作で白球が出たとすると，袋Ｕの中身は白球 a 個，赤球１個となり，さらに２回目の操作で赤球が出たとすると，袋Ｕの中身は白球 a 個のみとなる．

n 回目に取り出した球が赤球である確率を p_n とする．ただし，袋Ｕの中の個々の球の取り出される確率は等しいものとする．

(1)　p_1，p_2 を求めよ．

(2)　$n \geqq 3$ に対して p_n を求めよ．

(3)　$\displaystyle\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m} p_n$ を求めよ．

《14 東大・理科文科（文科は(2)まで)》

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第２講　整数問題

5　C を半径1の円周とし，A を C 上の1点とする．3点 P，Q，R が A を時刻 $t=0$ に出発し，C 上を各々一定の速さで，P，Q は反時計回りに，R は時計回りに，時刻 $t=2\pi$ まで動く．P，Q，R の速さは，それぞれ m，1，2 であるとする．(したがって，Q は C をちょうど一周する．) ただし，m は $1 \leqq m \leqq 10$ をみたす整数である．△PQR が PR を斜辺とする直角二等辺三角形となるような速さ m と時刻 t の組をすべて求めよ．

《10 東大・理科文科》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

6　p, q を2つの正の整数とする．整数 a, b, c で条件

$$-q \leqq b \leqq 0 \leqq a \leqq p,\ b \leqq c \leqq a$$

を満たすものを考え，このような a, b, c を $[a,\ b;\ c]$ の形に並べたものを $(p,\ q)$ パターンと呼ぶ．各 $(p,\ q)$ パターン $[a,\ b;\ c]$ に対して

$$w([a,\ b;\ c]) = p - q - (a + b)$$

とおく．

(1)　$(p,\ q)$ パターンのうち，$w([a,\ b;\ c]) = -q$ となるものの個数を求めよ．また，$w([a,\ b;\ c]) = p$ となる $(p,\ q)$ パターンの個数を求めよ．

以下 $p = q$ の場合を考える．

(2)　s を整数とする．$(p,\ p)$ パターンで $w([a,\ b;\ c]) = -p + s$ となるものの個数を求めよ．

(3)　$(p,\ p)$ パターンの総数を求めよ．

《11 東大・理科文科(文科は(2)まで)》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

7　m を 2015 以下の正の整数とする．${}_{2015}\mathrm{C}_m$ が偶数となる最小の m を求めよ．

《15 東大・理科》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

8 実数 x の小数部分を，$0 \leqq y < 1$ かつ $x-y$ が整数となる実数 y のこととし，これを記号 $\langle x \rangle$ で表す．

実数 a に対して，無限数列 $\{a_n\}$ の各項 $a_n(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を次のように順次定める．

(i) $a_1=\langle a \rangle$

(ii) $\begin{cases} a_n \neq 0 \text{ のとき，} a_{n+1}=\left\langle \dfrac{1}{a_n} \right\rangle \\ a_n=0 \text{ のとき，} a_{n+1}=0 \end{cases}$

(1) $a=\sqrt{2}$ のとき，数列 $\{a_n\}$ を求めよ．

(2) 任意の自然数 n に対して $a_n=a$ となるような $\dfrac{1}{3}$ 以上の実数 a をすべて求めよ．

(3) a が有理数であるとする．a を整数 p と自然数 q を用いて $a=\dfrac{p}{q}$ と表すとき，q 以上のすべての自然数 n に対して，$a_n=0$ であることを示せ．

《11 東大・理科文科（文科は(2)まで）》

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第３講　図形と方程式

9　座標平面上の３点

$$P(0,\ -\sqrt{2}),\ Q(0,\ \sqrt{2}),\ A(a,\ \sqrt{a^2+1})\quad (0 \leqq a \leqq 1)$$

を考える．

(1)　２つの線分の長さの差 PA－AQ は a によらない定数であることを示し，その値を求めよ．

(2)　Q を端点とし A を通る半直線と放物線 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{8}x^2$ との交点を B とする．点 B から直線 $y=2$ へ下ろした垂線と直線 $y=2$ との交点を C とする．このとき，線分の長さの和 PA＋AB＋BC は a によらない定数であることを示し，その値を求めよ．

《13 東大・文科》

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

10　座標平面において，点 P(0, 1) を中心とする半径 1 の円を C とする．a を $0<a<1$ を満たす実数とし，直線 $y=a(x+1)$ と C との交点を Q，R とする．

(1)　△PQR の面積 $S(a)$ を求めよ．

(2)　a が $0<a<1$ の範囲を動くとき，$S(a)$ が最大となる a を求めよ．

《11 東大・理科》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

11 座標平面上の１点 $\mathrm{P}\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}\right)$ をとる．放物線 $y=x^2$ 上の２点 $\mathrm{Q}(\alpha,\ \alpha^2)$，$\mathrm{R}(\beta,\ \beta^2)$ を，３点 P，Q，R が QR を底辺とする二等辺三角形をなすように動かすとき，△PQR の重心 $\mathrm{G}(X,\ Y)$ の軌跡を求めよ．

《11 東大・理科文科》

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

12　a，b を実数の定数とする．実数 x，y が

$$x^2+y^2\leqq 25,\quad 2x+y\leqq 5$$

をともに満たすとき，$z=x^2+y^2-2ax-2by$ の最小値を求めよ．

《13 東大・文科》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第４講　通過領域

13　正の実数 a に対して，座標平面上で次の放物線を考える．

$$C : y = ax^2 + \frac{1-4a^2}{4a}$$

a が正の実数全体を動くとき，C の通過する領域を図示せよ．

《15 東大・理科》

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

14　座標平面上の２点 A$(-1,\ 1)$, B$(1,\ -1)$ を考える．また，P を座標平面上の点とし，その x 座標の絶対値は１以下であるとする．次の条件(i)または(ii)をみたす点 P の範囲を図示し，その面積を求めよ．

(i)　頂点の x 座標の絶対値が１以上の２次関数のグラフで，点 A，P，B をすべて通るものがある．

(ii)　点 A，P，B は同一直線上にある．

《15 東大・文科》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

15　座標平面の原点をOで表す.

線分 $y=\sqrt{3}x$ $(0\leqq x\leqq 2)$ 上の点Pと, 線分 $y=-\sqrt{3}x$ $(-2\leqq x\leqq 0)$ 上の点Qが, 線分OPと線分OQの長さの和が6となるように動く. このとき線分PQの通過する領域を D とする.

(1) s を $0\leqq s\leqq 2$ を満たす実数とするとき, 点 $(s,\ t)$ が D に入るような t の範囲を求めよ.

(2) D を図示せよ.

《14東大・理科(文科に類題)》

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第５講　数Ⅱの微積

16　座標平面上の放物線 C を $y=x^2+1$ で定める．s，t は実数とし $t<0$ を満たすとする．点 (s, t) から放物線 C へ引いた接線を l_1，l_2 とする．

(1)　l_1，l_2 の方程式を求めよ．

(2)　a を正の実数とする．放物線 C と直線 l_1，l_2 で囲まれる領域の面積が a となる (s, t) を全て求めよ．

《12 東大・文科》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

17　関数 $y=x(x-1)(x-3)$ のグラフを C，原点 O を通る傾き t の直線を l とし，C と l が O 以外に共有点をもつとする．C と l の共有点を O，P，Q とし，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ と $|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$ の積を $g(t)$ とおく．ただし，それらの共有点の１つが接点である場合は，O，P，Q のうちの２つが一致して，その接点であるとする．関数 $g(t)$ の増減を調べ，その極値を求めよ．

《13 東大・文科》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

18 以下の問いに答えよ．

(1) t を実数の定数とする．実数全体を定義域とする関数 $f(x)$ を

$$f(x)=-2x^2+8tx-12x+t^3-17t^2+39t-18$$

と定める．このとき，関数 $f(x)$ の最大値を t を用いて表せ．

(2) (1)の「関数 $f(x)$ の最大値」を $g(t)$ とする．t が $t \geqq -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の範囲を動くとき，$g(t)$ の最小値を求めよ．

《14 東大・文科》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

19　3 辺の長さが a と b と c の直方体を，長さが b の 1 辺を回転軸として 90° 回転させるとき，直方体が通過する点全体がつくる立体を V とする.

(1)　V の体積を a，b，c を用いて表せ.

(2)　$a+b+c=1$ のとき，V の体積のとりうる値の範囲を求めよ.

《10 東大・理科》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第６講　計算練習

20　2 次関数 $f(x)=x^2+ax+b$ に対して

$$f(x+1)=c\int_0^1 (3x^2+4xt)f'(t)\,dt$$

が x についての恒等式になるような定数 a，b，c の組をすべて求めよ．

《10 東大・文科》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

21　x の 3 次関数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ が，3 つの条件

$$f(1)=1,\ f(-1)=-1,\ \int_{-1}^{1}(bx^2+cx+d)dx=1$$

を全て満たしているとする．このような $f(x)$ の中で定積分

$$I=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\{f''(x)\}^2dx$$

を最小にするものを求め，そのときの I の値を求めよ．ただし，$f''(x)$ は $f'(x)$ の導関数を表す．

《11 東大・文科》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

22 1辺の長さが1の正方形を底面とする四角柱 OABC－DEFG を考える．3点 P，Q，R を，それぞれ辺 AE，辺 BF，辺 CG 上に，4点 O，P，Q，R が同一平面上にあるようにとる．四角形 OPQR の面積を S とおく．また ∠AOP を α，∠COR を β とおく．

(1) S を $\tan\alpha$ と $\tan\beta$ で表せ．

(2) $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$，$S=\dfrac{7}{6}$ であるとき，$\tan\alpha+\tan\beta$ の値を求めよ．さらに，$\alpha\leqq\beta$ のとき，$\tan\alpha$ の値を求めよ．

《14 東大・理科》

※本問は，授業の進め方の都合上，東京大学の入試問題に記載された図を記載しておりません。

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

23　Oを原点とする座標平面上にA$(-3,\ 0)$をとり，$0°<\theta<120°$の範囲にあるθに対して，次の条件(i)，(ii)をみたす2点B，Cを考える．

(i)　Bは$y>0$の部分にあり，$\mathrm{OB}=2$かつ$\angle\mathrm{AOB}=180°-\theta$である．

(ii)　Cは$y<0$の部分にあり，$\mathrm{OC}=1$かつ$\angle\mathrm{BOC}=120°$である．ただし△ABCはOを含むものとする．

以下の問(1)，(2)に答えよ．

(1)　△OABと△OACの面積が等しいとき，θの値を求めよ．

(2)　θを$0°<\theta<120°$の範囲で動かすとき，△OABと△OACの面積の和の最大値と，そのときの$\sin\theta$の値を求めよ．

《10東大・文科》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第７講　小道具の使い方

24　実数 t は $0<t<1$ を満たすとし，座標平面上の 4 点 O(0, 0)，A(0, 1)，B(1, 0)，C(t, 0) を考える．また線分 AB 上の点 D を $\angle\mathrm{ACO}=\angle\mathrm{BCD}$ となるように定める．t を動かしたときの三角形 ACD の面積の最大値を求めよ．

《12 東大・文科》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

25　l を座標平面上の原点を通り傾きが正の直線とする．さらに，以下の３条件(ⅰ)，(ⅱ)，(ⅲ)で定まる円 C_1，C_2 を考える．

(ⅰ)　円 C_1，C_2 は２つの不等式 $x \geqq 0$，$y \geqq 0$ で定まる領域に含まれる．

(ⅱ)　円 C_1，C_2 は直線 l と同一点で接する．

(ⅲ)　円 C_1 は x 軸と点 $(1,\ 0)$ で接し，円 C_2 は y 軸と接する．

円 C_1 の半径を r_1，円 C_2 の半径を r_2 とする．$8r_1+9r_2$ が最小となるような直線 l の方程式と，その最小値を求めよ．

《15 東大・文科》

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

26　以下の命題 A，B それぞれに対し，その真偽を述べよ．また，真ならば証明を与え，偽ならば反例を与えよ．

命題 A　n が正の整数ならば，$\dfrac{n^3}{26}+100 \geqq n^2$ が成り立つ．

命題 B　整数 n，m，l が $5n+5m+3l=1$ をみたすならば，$10nm+3ml+3nl<0$ が成り立つ．

《15 東大・文科》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

27　座標平面上の点 $(x,\ y)$ が次の方程式を満たす.

$$2x^2+4xy+3y^2+4x+5y-4=0$$

このとき，x のとりうる最大の値を求めよ.

《12 東大・文科》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第８講　基本なんだけど…

28 数列 $\{p_n\}$ を次のように定める.

$$p_1=1,\ p_2=2,\ p_{n+2}=\frac{{p_{n+1}}^2+1}{p_n}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1) $\dfrac{{p_{n+1}}^2+{p_n}^2+1}{p_{n+1}p_n}$ が n によらないことを示せ.

(2) すべての $n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$ に対し，$p_{n+1}+p_{n-1}$ を p_n のみを使って表せ.

(3) 数列 $\{q_n\}$ を次のように定める.

$$q_1=1,\ q_2=1,\ q_{n+2}=q_{n+1}+q_n\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

すべての $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し，$p_n=q_{2n-1}$ を示せ.

《15 東大・理科》

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

29 $\triangle$ABC において $\angle \mathrm{BAC}=90^\circ$，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=1$，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=\sqrt{3}$ とする．$\triangle$ABC の内部の点 P が

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|}=\vec{0}$$

を満たすとする．

(1) $\angle \mathrm{APB}$，$\angle \mathrm{APC}$ を求めよ．

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|$ を求めよ．

《13 東大・理科》

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

30 四面体 OABC において，4 つの面はすべて合同であり，$\mathrm{OA}=3$，$\mathrm{OB}=\sqrt{7}$，$\mathrm{AB}=2$ であるとする．

また 3 点 O，A，B を含む平面を L とする．

(1) 点 C から平面 L に下ろした垂線の足を H とおく．$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ．

(2) $0<t<1$ をみたす実数 t に対して，線分 OA，OB 各々を $t:1-t$ に内分する点をそれぞれ P_t，Q_t とおく．2 点 P_t，Q_t を通り，平面 L に垂直な平面を M とするとき，平面 M による四面体 OABC の切り口の面積 $S(t)$ を求めよ．

(3) t が $0<t<1$ の範囲を動くとき，$S(t)$ の最大値を求めよ．

《10 東大・理科》

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第９講　複素数，２次曲線

31　実数 a，b に対し平面上の点 $\mathrm{P}_n(x_n,\ y_n)$ を

$$(x_0,\ y_0)=(1,\ 0)$$
$$(x_{n+1},\ y_{n+1})=(ax_n-by_n,\ bx_n+ay_n)\quad(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

によって定める．このとき，次の条件(ｉ)，(ⅱ)がともに成り立つような $(a,\ b)$ をすべて求めよ．

(ｉ)　$\mathrm{P}_0=\mathrm{P}_6$

(ⅱ)　P_0，P_1，P_2，P_3，P_4，P_5 は相異なる．

《13 東大・理科》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

32　$|z|>\dfrac{5}{4}$ となるどのような複素数 z に対しても $w=z^2-2z$ とは表されない複素数 w 全体の集合を T とする．

すなわち，$T=\left\{w \mid w=z^2-2z \text{ ならば } |z|\leqq\dfrac{5}{4}\right\}$ とする．このとき，T に属する複素数 w で絶対値 $|w|$ が最大となるような w を求めよ．

《05 東大・理科》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

33　Oを原点とする座標平面上の曲線

$$C : y = \frac{1}{2}x + \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + 2}$$

と，その上の相異なる2点 $P_1(x_1,\ y_1)$，$P_2(x_2,\ y_2)$ を考える．

(1)　P_i　$(i=1,\ 2)$ を通る x 軸に平行な直線と，直線 $y=x$ との交点を，それぞれ H_i　$(i=1,\ 2)$ とする．このとき $\triangle OP_1H_1$ と $\triangle OP_2H_2$ の面積は等しいことを示せ．

(2)　$x_1 < x_2$ とする．このとき C の $x_1 \leqq x \leqq x_2$ の範囲にある部分と，線分 P_1O，P_2O とで囲まれる図形の面積を，y_1，y_2 を用いて表せ．

《10東大・理科》

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 10 講　数学Ⅲの微分

34　次の連立不等式で定まる座標平面上の領域 D を考える．

$$x^2+(y-1)^2 \leqq 1,\quad x \geqq \frac{\sqrt{2}}{3}$$

直線 l は原点を通り，D との共通部分が線分となるものとする．その線分の長さ L の最大値を求めよ．また，L が最大値をとるとき，x 軸と l のなす角 θ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ の余弦 $\cos\theta$ を求めよ．

《12 東大・理科》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

35 a を正の実数とし，p を正の有理数とする．座標平面上の 2 つの曲線 $y=ax^p$ $(x>0)$ と $y=\log x$ $(x>0)$ を考える．この 2 つの曲線の共有点が 1 点のみであるとし，その共有点を Q とする．

以下の問いに答えよ．必要であれば，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^p}{\log x}=\infty$ を証明なしに用いてよい．

(1) a および点 Q の x 座標を p を用いて表せ．

(2) この 2 つの曲線と x 軸で囲まれる図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を p を用いて表せ．

(3) (2)で得られる立体の体積が 2π になるときの p の値を求めよ．

《15 東大・理科》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

36　a を実数とし，$x>0$ で定義された関数 $f(x)$，$g(x)$ を次のように定める．

$$f(x)=\frac{\cos x}{x}, \qquad g(x)=\sin x+ax$$

このとき $y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフが $x>0$ において共有点をちょうど 3 つ持つような a をすべて求めよ．

《13 東大・理科》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 11 講　数学Ⅲの積分

37　L を正定数とする．座標平面の x 軸上の正の部分にある点 $\mathrm{P}(t,\ 0)$ に対し，原点 O を中心とし点 P を通る円周上を，P から出発して反時計回りに道のり L だけ進んだ点を $\mathrm{Q}(u(t),\ v(t))$ と表す．

(1)　$u(t)$，$v(t)$ を求めよ．

(2)　$0<a<1$ の範囲の実数 a に対し，積分

$$f(a)=\int_a^1 \sqrt{\{u'(t)\}^2+\{v'(t)\}^2}\,dt$$

を求めよ．

(3)　極限 $\displaystyle\lim_{a\to+0}\frac{f(a)}{\log a}$ を求めよ．

《11 東大・理科》

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

38 u を実数とする．座標平面上の2つの放物線 C_1：$y=-x^2+1$，
C_2：$y=(x-u)^2+u$ を考える．
C_1とC_2が共有点をもつような u の値の範囲は，ある実数 a，b により，$a \leqq u \leqq b$と表される．

(1) a，b の値を求めよ．

(2) u が $a \leqq u \leqq b$ をみたすとき，C_1とC_2の共有点を $\mathrm{P}_1(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{P}_2(x_2,\ y_2)$ とする．ただし，共有点が1点のみのときは，P_1 と P_2 は一致し，ともにその共有点を表すとする．$2|x_1y_2-x_2y_1|$ を u の式で表せ．

(3) (2)で得られる u の式を $f(u)$ とする．定積分 $I=\int_a^b f(u)du$ を求めよ．

《14東大・理科》

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

39

(1) すべての自然数 k に対して，次の不等式を示せ.

$$\frac{1}{2(k+1)}<\int_0^1\frac{1-x}{k+x}dx<\frac{1}{2k}$$

(2) $m>n$ であるようなすべての自然数 m と n に対して，次の不等式を示せ.

$$\frac{m-n}{2(m+1)(n+1)}<\log\frac{m}{n}-\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k}<\frac{m-n}{2mn}$$

《10 東大・理科》

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

40　n を正の整数とする．以下の問いに答えよ．

(1)　関数 $g(x)$ を次のように定める．

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos(\pi x)+1}{2} & (|x|\leqq 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (|x|>1 \text{ のとき})\end{cases}$$

$f(x)$ を連続な関数とし，p，q を実数とする．$|x|\leqq\dfrac{1}{n}$ をみたす x に対して $p\leqq f(x)\leqq q$ が成り立つとき，次の不等式を示せ．

$$p\leqq n\int_{-1}^{1}g(nx)f(x)\,dx\leqq q$$

(2)　関数 $h(x)$ を次のように定める．

$$h(x)=\begin{cases}-\dfrac{\pi}{2}\sin(\pi x) & (|x|\leqq 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (|x|>1 \text{ のとき})\end{cases}$$

このとき，次の極限を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty}n^2\int_{-1}^{1}h(nx)\log(1+e^{x+1})\,dx$$

《15 東大・理科》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第12講　求積問題

41 座標平面上で2つの不等式

$$y \geqq \frac{1}{2}x^2, \quad \frac{x^2}{4} + 4y^2 \leqq \frac{1}{8}$$

によって定まる領域を S とする．S を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を V_1 とし，y 軸のまわりに回転してできる立体の体積を V_2 とする．

(1) V_1 と V_2 の値を求めよ．

(2) $\dfrac{V_2}{V_1}$ の値と1の大小を判定せよ．

《12東大・理科》

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

42

(1)　x, y を実数とし，$x>0$ とする．t を変数とする 2 次関数 $f(t)=xt^2+yt$ の $0\leqq t\leqq 1$ における最大値と最小値の差を求めよ．

(2)　次の条件を満たす点 $(x,\ y)$ 全体からなる座標平面内の領域を S とする．

$x>0$ かつ，実数 z で $0\leqq t\leqq 1$ の範囲の全ての実数 t に対して

$$0\leqq xt^2+yt+z\leqq 1$$

を満たすようなものが存在する．

S の概形を図示せよ．

(3)　次の条件を満たす点 $(x,\ y,\ z)$ 全体からなる座標空間内の領域を V とする．

$0\leqq x\leqq 1$ かつ，$0\leqq t\leqq 1$ の範囲の全ての実数 t に対して，

$$0\leqq xt^2+yt+z\leqq 1$$

が成り立つ．

V の体積を求めよ．

《11 東大・理科》

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

43　座標空間において，xy 平面内で不等式 $|x| \leqq 1$，$|y| \leqq 1$ により定まる正方形 S の4つの頂点を $\mathrm{A}(-1,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{C}(1,\ -1,\ 0)$，$\mathrm{D}(-1,\ -1,\ 0)$ とする．正方形 S を，直線 BD を軸として回転させてできる立体を V_1，直線 AC を軸として回転させてできる立体を V_2 とする．

(1)　$0 \leqq t < 1$ を満たす実数 t に対し，平面 $x = t$ による V_1 の切り口の面積を求めよ．

(2)　V_1 と V_2 の共通部分の体積を求めよ．

《13 東大・理科》

ⓒRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

テキスト解答

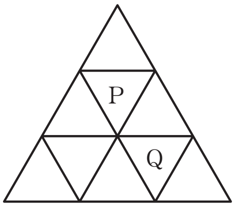
ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第１講　確率と漸化式

1　図のように，正三角形を９つの部屋に辺で区切り，部屋 P，Q を定める．１つの球が部屋 P を出発し，１秒ごとに，そのままその部屋にとどまることなく，辺を共有する隣の部屋に等確率で移動する．球が n 秒後に部屋 Q にある確率を求めよ．

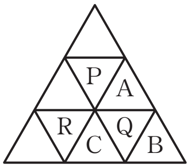
《12 東大・理科文科》



【答】

$$\begin{cases} \dfrac{1}{3}\left\{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}\right\} & (n \text{ が偶数のとき}) \\ 0 & (n \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

【解説】 右図の様に P と Q 以外の部屋を定める．



最初に球は P の部屋にあることより，n が奇数のときには球は P，Q，R 以外の部屋にあり，n が偶数のときには球は P，Q，R のどこかの部屋にある．

以下 m を偶数とする．

$m+2$ 秒後に Q の部屋に球があるのは

(Ⅰ) m 秒後に P にあり，確率 $\dfrac{1}{3}$ で A に移動して，確率 $\dfrac{1}{2}$ で Q に移動する．

(Ⅱ) m 秒後に Q にあり，確率 $\dfrac{1}{3}$ で A に移動して，確率 $\dfrac{1}{2}$ で Q に移動する．

(Ⅲ) m 秒後に Q にあり，確率 $\dfrac{1}{3}$ で B に移動して，確率 1 で Q に移動する．

(Ⅳ) m 秒後に Q にあり，確率 $\dfrac{1}{3}$ で C に移動して，確率 $\dfrac{1}{2}$ で Q に移動する．

(Ⅴ) m 秒後に R にあり，確率 $\dfrac{1}{3}$ で C に移動して，確率 $\dfrac{1}{2}$ で Q に移動する．

の５つの場合だけ考えればよいので，n 秒後に P，Q，R にある確率をそれぞれ P_n，Q_n，R_n とすると，

$$Q_{m+2}=P_m\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+Q_m\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+Q_m\times\frac{1}{3}\times1+Q_m\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+R_m\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}$$

$$\therefore\quad Q_{m+2}=\frac{1}{6}(P_m+R_m)+\frac{2}{3}Q_m$$

が成り立つ．ここで $P_m+Q_m+R_m=1$ より $P_m+R_m=1-Q_m$ を代入すると

$$Q_{m+2}=\frac{1}{6}(1-Q_m)+\frac{2}{3}Q_m \iff Q_{m+2}=\frac{1}{2}Q_m+\frac{1}{6}$$

$$\iff Q_{m+2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\left(Q_m-\frac{1}{3}\right)\quad\cdots①$$

となり，最初球が P にあることより $Q_0=0$ と定めることができるので，$Q_0=0$ と①より

$$Q_{2n}=\frac{1}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

以上より求める確率は $\begin{cases} \dfrac{1}{3}\left\{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}\right\} & (n\text{ が偶数のとき}) \\ 0 & (n\text{ が奇数のとき}) \end{cases}$.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　2つの箱LとR，ボール30個，コイン投げで表と裏が等確率 $\frac{1}{2}$ で出るコイン1枚を用意する．x を0以上30以下の整数とする．Lに x 個，Rに $30-x$ 個のボールを入れ，次の操作(#)を繰り返す．

(#)　箱Lに入っているボールの個数を z とする．コインを投げ，表が出れば箱Rから箱Lに，裏が出れば箱Lから箱Rに，$K(z)$ 個のボールを移す．ただし，$0\leqq z\leqq 15$ のとき $K(z)=z$，$16\leqq z\leqq 30$ のとき $K(z)=30-z$ とする．

m 回の操作の後，箱Lのボールの個数が30である確率を $P_m(x)$ とする．たとえば $P_1(15)=P_2(15)=\frac{1}{2}$ となる．以下の問(1)，(2)，(3)に答えよ．

(1)　$m\geqq 2$ のとき，x に対してうまく y を選び，$P_m(x)$ を $P_{m-1}(y)$ で表せ．

(2)　n を自然数とするとき，$P_{2n}(10)$ を求めよ．

(3)　n を自然数とするとき，$P_{4n}(6)$ を求めよ．

《10東大・理科文科(文科(2)まで)》

【答】　(1)　$P_m(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}P_{m-1}(2x) & (0\leqq x\leqq 15のとき)\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}P_{m-1}(2x-30) & (16\leqq x\leqq 30のとき)\end{cases}$

(2)　$P_{2n}(10)=\frac{1}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}$　　(3)　$P_{4n}(6)=\frac{1}{5}\left\{1-\left(\frac{1}{16}\right)^n\right\}$

【解説】　Lに x 個，Rに y 個ボールが入っている状態を $(x,\ y)$ で表すことにする．

(#)により，一度 $(0,\ 30)$ または $(30,\ 0)$ になってしまえば，$K(z)=0$ となるので，それ以降はすべておなじ状態が続くことになる．

以下，表が出たときの状態の移り変わりを「⇒」で表して，裏が出たときのそれを「→」で表すことにする．

(1)　$0\leqq x\leqq 15$ のとき

$(x,\ 30-x)\Rightarrow(2x,\ 30-2x)$ または $(x,\ 30-x)\rightarrow(0,\ 30)$ が確率 $\frac{1}{2}$ でおこり，一度 $(0,\ 30)$ になるとLに30個入ることにはならないので，$P_m(x)=\frac{1}{2}P_{m-1}(2x)$.

$16\leqq x\leqq 30$ のとき $(x,\ 30-x)\Rightarrow(30,\ 0)$ または $(x,\ 30-x)\rightarrow(2x-30,\ 60-2x)$ が確率 $\frac{1}{2}$ でおこり，$(30,\ 0)$ ではLに30個ボールが入っていることになるので，

$P_m(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}P_{m-1}(2x-30)$.

以上より，$\boldsymbol{P_m(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}P_{m-1}(2x) & (0\leqq x\leqq 15\ のとき)\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}P_{m-1}(2x-30) & (16\leqq x\leqq 30\ のとき)\end{cases}}$.

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(2)　(1)の結果を用いると，$P_{2n+2}(10)=\frac{1}{2}P_{2n+1}(20)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}P_{2n}(10)\right)$ つまり

$P_{2n+2}(10)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}P_{2n}(10)$ が成り立ち，これは $P_{2n+2}(10)-\frac{1}{3}=\frac{1}{4}\left(P_{2n}(10)-\frac{1}{3}\right)$ と変形

できることと，$(10,\ 20)\Rightarrow(20,\ 10)\Rightarrow(30,\ 0)$ を考えると $P_2(10)=\frac{1}{4}$ なので

$P_{2n}(10)-\frac{1}{3}=\left(P_2(10)-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n$．よって $\boldsymbol{P_{2n}(10)=\frac{1}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}}$.

(3)　(2)と同様に考えて

$$\begin{aligned}P_{4n+4}(6)&=\frac{1}{2}P_{4n+3}(12)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}P_{4n+2}(24)\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}P_{4n+1}(18)\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}P_{4n}(6)\right)\right\}\end{aligned}$$

つまり $P_{4n+4}(6)=\frac{1}{16}P_{4n}(6)+\frac{3}{16}$ が成り立つが, これは $P_{4n+4}(6)-\frac{1}{5}=\frac{1}{16}\left(P_{4n}(6)-\frac{1}{5}\right)$

と変形され,

$P_4(6)=\frac{1}{2}P_3(12)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}P_2(24)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}P_1(18)\right)$ で $P_1(18)=\frac{1}{2}$ より

$P_4(6)=\frac{3}{16}$ なので

$$\begin{aligned}P_{4n}(6)-\frac{1}{5}&=\left(P_4(6)-\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{16}\right)^{n-1}\\&=-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{16}\right)^n\end{aligned}$$

となる.

よって $\boldsymbol{P_{4n}(6)=\frac{1}{5}\left\{1-\left(\frac{1}{16}\right)^n\right\}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　どの目も出る確率が $\frac{1}{6}$ のさいころを1つ用意し，次のように左から順に文字を書く．

さいころを投げ，出た目が1，2，3のときは文字列AAを書き，4のときは文字Bを，5のときは文字Cを，6のときは文字Dを書く．さらに繰り返しさいころを投げ，同じ規則に従って，AA，B，C，Dをすでにある文字列の右側につなげて書いていく．

たとえば，さいころを5回投げ，その出た目が順に2，5，6，3，4であったとすると，得られる文字列はAACDAABとなる．このとき，左から4番目の文字はD，5番目の文字はAである．

(1)　n を正の整数とする．n 回さいころを投げ，文字列を作るとき，文字列の左から n 番目の文字がAとなる確率を求めよ．

(2)　n を2以上の整数とする．n 回さいころを投げ，文字列を作るとき，文字列の左から $n-1$ 番目の文字がAで，かつ n 番目の文字がBとなる確率を求めよ．

《15東大・理科(文科に類題)》

【答】　(1)　$\frac{1}{3}\left\{2+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$　　(2)　$\frac{1}{18}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right\}$

【解説】　左から n 番目の文字が，偶数個連続しているAの左から奇数番目のAである確率を x_n，偶数個連続しているAの左から偶数番目のAである確率を y_n とする．

また，左から n 番目の文字が，B，C，Dである確率をそれぞれ b_n，c_n，d_n とする．

このとき $x_1=\frac{1}{2}$　…①，$y_1=0$，$b_1=c_1=d_1=\frac{1}{6}$ である．また $x_n+y_n+b_n+c_n+d_n=1$ …②である．

(1)　左から $n+1$ 番目の文字が，偶数個連続しているAの左から奇数番目のAとなるには，左から n 番目の文字が，BまたはCまたはDか偶数個連続しているAの左から偶数番目のAであり，なおかつ $n+1$ 回目に投げたさいころの出た目が1，2，3のいずれかであればよいので $x_{n+1}=(b_n+c_n+d_n+y_n)\times\frac{3}{6}$ が成り立つ．

ここで，②より $b_n+c_n+d_n+y_n=1-x_n$ なので，$x_{n+1}=\frac{1}{2}(1-x_n)$ となり，これを

$x_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(x_n-\frac{1}{3}\right)$ と変形することで，$x_n-\frac{1}{3}=\left(x_1-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ を得る．これと①より $x_n=\frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$

次に，$n\geqq 2$ のとき，左から n 番目の文字が，偶数個連続しているAの左から偶数番目のAとなるには，左から $n-1$ 番目の文字が，偶数個連続しているAの左から奇数番目のAとなっていればよいので，$y_n=x_{n-1}=\frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$ となる．$y_1=0$ より，これは $n=1$ のときにも成り立つ．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

よって求める確率は $x_n+y_n=\mathbf{\frac{1}{3}\left\{2+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}}$.

(2)　条件より，左から $n-1$ 番目が，偶数個連続している A の左から偶数番目の A であり，n 回目に投げ，出た目が 4 であればよいので，求める確率は

$y_{n-1}\times\frac{1}{6}=\mathbf{\frac{1}{18}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right\}}$.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

4 aを自然数（すなわち１以上の整数）の定数とする．
白球と赤球があわせて１個以上入っている袋Uに対して，次の操作（＊）を考える．
（＊） 袋Uから球を１個取り出し，
(i) 取り出した球が白球のときは，袋Uの中身が白球a個，赤球１個となるようにする．
(ii) 取り出した球が赤球のときは，その球を袋Uへ戻すことなく，袋Uの中身はそのままにする．

はじめに袋Uの中に，白球が$a+2$個，赤球が１個入っているとする．この袋Uに対して操作（＊）を繰り返し行う．

たとえば，１回目の操作で白球が出たとすると，袋Uの中身は白球a個，赤球１個となり，さらに２回目の操作で赤球が出たとすると，袋Uの中身は白球a個のみとなる．

n回目に取り出した球が赤球である確率をp_nとする．ただし，袋Uの中の個々の球の取り出される確率は等しいものとする．

(1) p_1，p_2を求めよ．

(2) $n\geqq 3$に対してp_nを求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m}p_n$を求めよ．

《14東大・理科文科（文科は(2)まで）》

【答】 (1) $p_1=\dfrac{1}{a+3}$，$p_2=\dfrac{a+2}{(a+1)(a+3)}$

(2) $p_n=\dfrac{1}{a+2}-\dfrac{1}{(a+2)(a+3)}\left(-\dfrac{1}{a+1}\right)^{n-1}$　　(3) $\dfrac{1}{a+2}$

【解説】 (1) 最初Uの中には球は合計で$(a+2)+1=a+3$個入っていて，そのうち赤球は１個だけなので$\boldsymbol{p_1=\dfrac{1}{a+3}}$．

１回目に赤を取り出してしまうと，(ii)により２回目に赤は取り出せない．また，１回目に白を取り出すと，Uの中身は合計で$a+1$個の球が入っていて，そのうち赤は１個だけとなる．

以上より$\boldsymbol{p_2}=(1-p_1)\times\dfrac{1}{a+1}\boldsymbol{=\dfrac{a+2}{(a+1)(a+3)}}$．

(2) p_2を求めたときと同様に考えると，

$n+1$回目に赤球を取り出すには，n回目に白を取り出さなければいけないので，

$p_{n+1}=(1-p_n)\times\dfrac{1}{a+1}$．

これを$p_{n+1}-\dfrac{1}{a+2}=-\dfrac{1}{a+1}\left(p_n-\dfrac{1}{a+2}\right)$と変形して

$p_n-\dfrac{1}{a+2}=\left(p_1-\dfrac{1}{a+2}\right)\left(-\dfrac{1}{a+1}\right)^{n-1}$を得るが，$p_1=\dfrac{1}{a+3}$より

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$$\boldsymbol{p_n=\frac{1}{a+2}-\frac{1}{(a+2)(a+3)}\left(-\frac{1}{a+1}\right)^{n-1}}.$$

(3)　a は自然数なので $-1<-\dfrac{1}{a+1}<1$ であるから，

$$\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m}p_n=\frac{1}{m}\left\{\frac{1}{a+2}\times m-\frac{1}{(a+2)(a+3)}\times\frac{1-\left(-\frac{1}{a+1}\right)^m}{1-\left(-\frac{1}{a+1}\right)}\right\}$$

$$=\frac{1}{a+2}-\frac{1}{m}\times\frac{a+1}{(a+2)^2(a+3)}\left\{1-\left(-\frac{1}{a+1}\right)^m\right\}$$

ここで，$\displaystyle\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}=0$，$\displaystyle\lim_{m\to\infty}\left(-\frac{1}{a+1}\right)^m=0$ より

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m}p_n=\boldsymbol{\frac{1}{a+2}}.$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第２講　整数問題

5　C を半径１の円周とし，A を C 上の１点とする．３点 P，Q，R が A を時刻 $t=0$ に出発し，C 上を各々一定の速さで，P，Q は反時計回りに，R は時計回りに，時刻 $t=2\pi$ まで動く．P，Q，R の速さは，それぞれ m，1，2 であるとする．(したがって，Q は C をちょうど一周する．) ただし，m は $1\leqq m\leqq 10$ をみたす整数である．△PQR が PR を斜辺とする直角二等辺三角形となるような速さ m と時刻 t の組をすべて求めよ．

《10 東大・理科文科》

【答】　$(m,\ t)=\left(4,\ \dfrac{2l+1}{6}\pi\right),\ \left(8,\ \dfrac{2l'+1}{2}\pi\right)\quad (l=0,\ 1,\ \cdots,\ 5,\ l'=0,\ 1)$

【解説】　題意より，PR は円 C の直径となり，Q は PR の垂直二等分線上にあればよい．

整数 k，l を用いると，PR が円 C の直径となる条件は $mt-(-2t)=(2k+1)\pi$　…①，Q は PR の垂直二等分線上にある条件は $t-(-2t)=\left(l+\dfrac{1}{2}\right)\pi$　…②となる．

②より $t=\dfrac{2l+1}{6}\pi$ なので，これと $0\leqq t\leqq 2\pi$ より $0\leqq \dfrac{2l+1}{6}\pi\leqq 2\pi$．

よって $0\leqq 2l+1\leqq 12$．

これを満たすものは $l=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$．

この結果と①より $m=\dfrac{6(2k+1)}{2l+1}-2$ であるが，$l=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ のとき，$1\leqq m\leqq 10$ となる k を考えることにより

$l=0,\ 2,\ 3,\ 5$ のときは $m=4$，$l=1,\ 4$ のとき $m=4,\ 8$ を得る．

以上より，求める組は

$$\boldsymbol{(m,\ t)=\left(4,\ \dfrac{2l+1}{6}\pi\right),\ \left(8,\ \dfrac{2l'+1}{2}\pi\right)\quad (l=0,\ 1,\ \cdots,\ 5,\ l'=0,\ 1)}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

6　p, q を２つの正の整数とする．整数 a, b, c で条件

$$-q \leqq b \leqq 0 \leqq a \leqq p,\ b \leqq c \leqq a$$

を満たすものを考え，このような a, b, c を $[a,\ b;\ c]$ の形に並べたものを $(p,\ q)$ パターンと呼ぶ．各 $(p,\ q)$ パターン $[a,\ b;\ c]$ に対して

$$w([a,\ b;\ c]) = p - q - (a+b)$$

とおく．

(1)　$(p,\ q)$ パターンのうち，$w([a,\ b;\ c]) = -q$ となるものの個数を求めよ．また，$w([a,\ b;\ c]) = p$ となる $(p,\ q)$ パターンの個数を求めよ．

以下 $p=q$ の場合を考える．

(2)　s を整数とする．$(p,\ p)$ パターンで $w([a,\ b;\ c]) = -p+s$ となるものの個数を求めよ．

(3)　$(p,\ p)$ パターンの総数を求めよ．

《11 東大・理科文科(文科は(2)まで)》

【答】 (1)　順に，$p+1$，$q+1$　(2) $\begin{cases} 0 & (s \leqq -1,\ s \geqq 2p+1) \\ (p+1)(s+1) & (0 \leqq s \leqq p) \\ (p+1)(2p-s+1) & (p+1 \leqq s \leqq 2p) \end{cases}$

(3)　$(p+1)^3$

【解説】 (1)　$w([a,\ b;\ c]) = -q$ より $p-q-(a+b) = -q$，つまり $a+b=p$ である．このとき，$-q \leqq b \leqq 0$ かつ $0 \leqq a \leqq p$ を満たすもので，$a+b=p$ となるものは $a=p$，$b=0$ だけだから，$b \leqq c \leqq a \iff 0 \leqq c \leqq p$ を満たすものの個数は $\boldsymbol{p+1}$.

また $w([a,\ b;\ c]) = p$ より $p-q-(a+b)=p$，つまり $a+b=-q$ より同様に $a=0$，$b=-q$ なので，$b \leqq c \leqq a \iff -q \leqq c \leqq 0$ を満たすものの個数は $\boldsymbol{q+1}$.

(2)　$w([a,\ b;\ c]) = -p+s$ より $-(a+b) = -p+s$，つまり $a+b=p-s$ となる．これと $-p \leqq b \leqq 0$ かつ $0 \leqq a \leqq p$ を満たすものを考える．

(I)　$p-s \geqq p+1$，$p-s \leqq -p-1$ つまり $s \leqq -1$，$s \geqq 2p+1$ のとき，$a+b=p-s$ と $-p \leqq b \leqq 0$ かつ $0 \leqq a \leqq p$ を満たすものが存在しないので，求める個数は 0.

(II)　$0 \leqq p-s \leqq p$ つまり $0 \leqq s \leqq p$ のとき，求める個数は

$$\sum_{a=p-s}^{p}(a-b+1) = \sum_{a=p-s}^{p}(2a-p+s+1) = \frac{(s+1)\{(p-s+1)+(p+s+1)\}}{2} = (p+1)(s+1).$$

(III)　$-p \leqq p-s \leqq -1$ つまり $p+1 \leqq s \leqq 2p$ のとき，求める個数は

$$\sum_{a=0}^{2p-s}(a-b+1) = \sum_{a=0}^{2p-s}(2a-p+s+1) = \frac{(2p-s+1)\{(-p+s+1)+(3p-s+1)\}}{2}$$

$$= (p+1)(2p-s+1).$$

以上より，求める個数は $\begin{cases} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{(s \leqq -1,\ s \geqq 2p+1)} \\ \boldsymbol{(p+1)(s+1)} & \boldsymbol{(0 \leqq s \leqq p)} \\ \boldsymbol{(p+1)(2p-s+1)} & \boldsymbol{(p+1 \leqq s \leqq 2p)} \end{cases}$.

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(3)　(2)の結果より，求める総数は

$$\sum_{s=0}^{p}(p+1)(s+1)+\sum_{s=p+1}^{2p}(p+1)(2p-s+1)=(p+1)\cdot\frac{1}{2}(p+1)(p+2)+(p+1)\cdot\frac{1}{2}p(p+1)$$

$$=\boldsymbol{(p+1)^3}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

7　m を 2015 以下の正の整数とする．${}_{2015}\mathrm{C}_m$ が偶数となる最小の m を求めよ．

《15 東大・理科》

【答】　$m=32$

【解説】　$1984=31\times64$，$2048=32\times64$ より 1985 から 2047 までに 64 の倍数は存在しない．

よって，1985 から 2015 までは 64 で割り切れない．

また，$2015=63\times32-1$，$1985=63\times32-31$ より $k=1,\ 2,\ \cdots,\ 31$ に対し $63\times32-k$ と k を素因数分解したときの，素因数 2 の個数は一致する．

よって ${}_{2015}\mathrm{C}_m=\dfrac{(63\times32-1)\times\cdots\times(63\times32-m)}{m\times\cdots\times1}$ において，$m=1,\ 2,\ \cdots,\ 31$ のときには，分子と分母の素因数 2 の個数は等しいので偶数になることはない．

$m=32$ のとき $63\times32-32=31\cdot64$ より

$${}_{2015}\mathrm{C}_{32}=\frac{(63\times32-1)\times\cdots\times(63\times32-31)\times31\cdot64}{32\times31\times\cdots\times1}={}_{2015}\mathrm{C}_{31}\times31\times2$$ は偶数である．

以上より，求める m の最小値は $\boldsymbol{m=32}$．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

8 実数 x の小数部分を，$0 \leqq y < 1$ かつ $x-y$ が整数となる実数 y のこととし，これを記号 $\langle x \rangle$ で表す.

実数 a に対して，無限数列 $\{a_n\}$ の各項 a_n $(n=1, 2, 3, \cdots)$ を次のように順次定める.

(i) $a_1 = \langle a \rangle$

(ii) $\begin{cases} a_n \neq 0 \text{ のとき,} & a_{n+1} = \left\langle \dfrac{1}{a_n} \right\rangle \\ a_n = 0 \text{ のとき,} & a_{n+1} = 0 \end{cases}$

(1) $a = \sqrt{2}$ のとき，数列 $\{a_n\}$ を求めよ.

(2) 任意の自然数 n に対して $a_n = a$ となるような $\dfrac{1}{3}$ 以上の実数 a をすべて求めよ.

(3) a が有理数であるとする. a を整数 p と自然数 q を用いて $a = \dfrac{p}{q}$ と表すとき，q 以上のすべての自然数 n に対して，$a_n = 0$ であることを示せ.

《11 東大・理科文科(文科は(2)まで)》

【答】 (1) $a_n = \sqrt{2} - 1$　(2) $a = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $-1+\sqrt{2}$　(3) 略

【解説】 (1) $a_1 = \langle \sqrt{2} \rangle$ であるが，$1 < \sqrt{2} < 2$ なので，$\langle \sqrt{2} \rangle = \sqrt{2} - 1$，よって $a_1 = \sqrt{2} - 1$.

$a_1 \neq 0$ より $a_2 = \left\langle \dfrac{1}{a_1} \right\rangle = \left\langle \dfrac{1}{\sqrt{2}-1} \right\rangle = \langle \sqrt{2}+1 \rangle$ ここで $2 < \sqrt{2}+1 < 3$ なので

$\langle \sqrt{2}+1 \rangle = \sqrt{2} - 1$，よって $a_2 = \sqrt{2} - 1$. 以下，帰納的に $a_n = \sqrt{2} - 1$.

以上より，$\boldsymbol{a_n = \sqrt{2} - 1 \ (n \geqq 1)}$.

(2) まず 2 以上の n に対して，(ii)より $0 \leqq a_n < 1$ となるので $0 \leqq a < 1$. これと $\dfrac{1}{3}$ 以上とのことより $\dfrac{1}{3} \leqq a < 1$ よって $1 < \dfrac{1}{a} \leqq 3$ となる.

(I) $1 < \dfrac{1}{a} < 2$ つまり $\dfrac{1}{2} < a < 1$ のとき

$a_2 = \left\langle \dfrac{1}{a} \right\rangle = \dfrac{1}{a} - 1$ より，これが a に等しいので $\dfrac{1}{a} - 1 = a \iff a^2 + a - 1 = 0$

これと $\dfrac{1}{2} < a < 1$ より $a = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$. このとき，帰納的に $a_n = a$ となる.

(II) $2 \leqq \dfrac{1}{a} < 3$ つまり $\dfrac{1}{3} < a \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき

$a_2 = \left\langle \dfrac{1}{a} \right\rangle = \dfrac{1}{a} - 2$ より，これが a に等しいので $\dfrac{1}{a} - 2 = a \iff a^2 + 2a - 1 = 0$

これと $\dfrac{1}{3} < a \leqq \dfrac{1}{2}$ より $a = -1 + \sqrt{2}$. このとき，帰納的に $a_n = a$ となる.

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(Ⅲ) $\dfrac{1}{a}=3$ つまり $a=\dfrac{1}{3}$ のとき

$a_2=\left\langle\dfrac{1}{a}\right\rangle=\dfrac{1}{a}-3=0$ より，3 以上の n に対して $a_n=0$ となるので不適.

以上より，$\boldsymbol{a=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}$，$\boldsymbol{-1+\sqrt{2}}$.

(3) p を q で割ったときの商を Q_1，余りを r_1 とすると，Q_1，r_1 は整数で

$p=qQ_1+r_1\quad(0\leqq r_1<q)$ を満たすので，$a_1=\left\langle\dfrac{qQ_1+r_1}{q}\right\rangle=\left\langle Q_1+\dfrac{r_1}{q}\right\rangle$ より $a_1=\dfrac{r_1}{q}$.

ここで，$r_1=0$ であれば，1 以上の n に対して $a_n=0$ となる.

$r_1\neq0$ のとき q を r_1 で割ったときの商を Q_2，余りを r_2 とすると，Q_2，r_2 は整数で

$q=r_1Q_2+r_2\quad(0\leqq r_2<r_1)$ を満たすので，$a_2=\left\langle\dfrac{r_1Q_2+r_2}{r_1}\right\rangle=\left\langle Q_2+\dfrac{r_2}{r_1}\right\rangle$ より $a_2=\dfrac{r_2}{r_1}$.

ここで，$r_2=0$ であれば，2 以上の n に対して $a_n=0$ となる.

以下，2 以上の自然数 k に対して $r_l\neq0\quad(l=1,\ \cdots,\ k)$ として，

r_{k-1} を r_k で割ったときの商を Q_{k+1}，余りを r_{k+1} とすると，Q_{k+1}，r_{k+1} は整数で

$r_{k-1}=r_kQ_{k+1}+r_{k+1}\quad(0\leqq r_{k+1}<r_k)$ を満たすので，

$a_{k+1}=\left\langle\dfrac{r_kQ_{k+1}+r_{k+1}}{r_k}\right\rangle=\left\langle Q_{k+1}+\dfrac{r_{k+1}}{r_k}\right\rangle$ より $a_{k+1}=\dfrac{r_{k+1}}{r_k}$.

ここで，$r_{k+1}=0$ であれば，$k+1$ 以上の n に対して $a_n=0$ となるが，$r_{k+1}\neq0$ であれば，帰納的に $q>r_1>r_2>\cdots>r_k>r_{k+1}>\cdots\geqq0$ が成り立つことになる.

ここで，q は自然数，r_1，$\cdots$，r_k，r_{k+1}，$\cdots$ は 0 以上の整数なので，0 以外の $\{r_n\}$ の個数は最高で $q-1$ 個となり，q 以上の自然数 n に対して $r_n=0$ になる.

よって q 以上の自然数 n に対して $a_n=0$ となることが示された.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第３講　図形と方程式

9　座標平面上の３点

$$\mathrm{P}(0,\ -\sqrt{2}),\ \mathrm{Q}(0,\ \sqrt{2}),\ \mathrm{A}(a,\ \sqrt{a^2+1})\quad (0 \leqq a \leqq 1)$$

を考える．

(1)　２つの線分の長さの差 PA－AQ は a によらない定数であることを示し，その値を求めよ．

(2)　Q を端点とし A を通る半直線と放物線 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{8}x^2$ との交点を B とする．点 B から直線 $y=2$ へ下ろした垂線と直線 $y=2$ との交点を C とする．このとき，線分の長さの和 PA＋AB＋BC は a によらない定数であることを示し，その値を求めよ．

《13 東大・文科》

【答】 (1)　2　　(2)　$4+\sqrt{2}$

【解説】 (1)

$$\begin{aligned}
\mathrm{PA}-\mathrm{AQ} &= \sqrt{a^2+\{\sqrt{a^2+1}-(-\sqrt{2})\}^2}-\sqrt{(-a)^2+(\sqrt{2}-\sqrt{a^2+1})^2}\\
&= \sqrt{2a^2+3+2\sqrt{2a^2+2}}-\sqrt{2a^2+3-2\sqrt{2a^2+2}}\\
&= \sqrt{(\sqrt{2a^2+2}+1)^2}-\sqrt{(\sqrt{2a^2+2}-1)^2}\\
&= |\sqrt{2a^2+2}+1|-|\sqrt{2a^2+2}-1|\\
&= (\sqrt{2a^2+2}+1)-(\sqrt{2a^2+2}-1)\quad (\because\ \ \sqrt{2a^2+2}>1)\\
&= \mathbf{2}
\end{aligned}$$

(2)　$\mathrm{B}\left(t,\ \dfrac{\sqrt{2}}{8}t^2\right)$　$(t \geqq 0)$ とおける．

このとき，$\mathrm{QB}=\sqrt{(t-0)^2+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{8}t^2-\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{8}t^2+\sqrt{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{8}t^2+\sqrt{2}$ であり，$\sqrt{a^2+1} \leqq \sqrt{2}$ より半直線 QA は直線 $y=2$ の下側にあるので，$\mathrm{BC}=2-\dfrac{\sqrt{2}}{8}t^2$ となる．

また，(1)より PA＝2＋AQ なので

$$\begin{aligned}
\mathrm{PA}+\mathrm{AB}+\mathrm{BC} &= 2+\mathrm{AQ}+\mathrm{AB}+\mathrm{BC}\\
&= 2+\mathrm{QB}+\mathrm{BC}\\
&= 2+\left(\frac{\sqrt{2}}{8}t^2+\sqrt{2}\right)+\left(2-\frac{\sqrt{2}}{8}t^2\right)\\
&= \mathbf{4+\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

10 座標平面において，点P(0，1)を中心とする半径1の円をCとする．aを$0<a<1$を満たす実数とし，直線$y=a(x+1)$とCとの交点をQ，Rとする．

(1) △PQRの面積$S(a)$を求めよ．

(2) aが$0<a<1$の範囲を動くとき，$S(a)$が最大となるaを求めよ．

《11東大・理科》

【答】 (1) $S(a)=\dfrac{\sqrt{2a}\,(1-a)}{a^2+1}$　(2) $a=2-\sqrt{3}$

【解説】 (1) P(0，1)と直線$y=a(x+1) \iff ax-y+a=0$との距離をdとすると

$$d=\frac{|a\cdot 0-1+a|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}} \qquad \therefore\quad d=\frac{1-a}{\sqrt{a^2+1}}$$

このとき$d^2=\dfrac{(1-a)^2}{a^2+1}=1-\dfrac{2a}{a^2+1}$で$a>0$より$d^2<1$つまり$d<1$．また$0<a<1$より$d=\dfrac{1-a}{\sqrt{a^2+1}}>0$なので，$0<d<1$となり，直線$y=a(x+1)$は円$C$と確かに異なる2点で交わっている．

三平方の定理より$\dfrac{\mathrm{QR}}{2}=\sqrt{1-d^2}=\sqrt{1-\left(\dfrac{1-a}{\sqrt{a^2+1}}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{2a}}{\sqrt{a^2+1}}$なので

$\mathrm{QR}=\dfrac{2\sqrt{2a}}{\sqrt{a^2+1}}$となる．

よって$\boldsymbol{S(a)}=\dfrac{1}{2}\times\mathrm{QR}\times d=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2a}\,(1-a)}{a^2+1}}$

(2) (1)より$S(a)=\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{1-d^2}\times d=\sqrt{-\left(d^2-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}}$なので，$d^2=\dfrac{1}{2}$のとき$S(a)$は最大となる．

このとき$\dfrac{(1-a)^2}{a^2+1}=\dfrac{1}{2} \iff a^2-4a+1=0$であるが，$0<a<1$より求める$a$は

$\boldsymbol{a=2-\sqrt{3}}$．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

11 座標平面上の１点 $P\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}\right)$ をとる．放物線 $y=x^2$ 上の２点 $Q(\alpha,\ \alpha^2)$，$R(\beta,\ \beta^2)$ を，３点 P，Q，R が QR を底辺とする二等辺三角形をなすように動かすとき，△PQR の重心 $G(X,\ Y)$ の軌跡を求めよ．

《11 東大・理科文科》

【答】 $Y=\dfrac{2}{18X-3}-\dfrac{1}{12}\quad\left(\dfrac{1}{6}<X<\dfrac{1}{2}\right)$

【解説】 $\overrightarrow{QR}=(\beta-\alpha)(1,\ \alpha+\beta)$ より QR の垂直二等分線は

$1\cdot\left(x-\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)+(\alpha+\beta)\cdot\left(y-\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2}\right)=0$ と表すことができ，この直線が P を通るので

$$\frac{1}{2}-\frac{\alpha+\beta}{2}+(\alpha+\beta)\left(\frac{1}{4}-\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}\right)=0$$

$$\iff\ \frac{1}{2}-\frac{\alpha+\beta}{4}-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}=0\quad\cdots①$$

が成り立つ．

ここで，$\alpha+\beta=s$，$\alpha\beta=t$ とおくと，α と β は２次方程式 $x^2-sx+t=0$ の $\dfrac{1}{2}$ 以外の異なる２つの実数解なので

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2-s\cdot\frac{1}{2}+t\neq0\ \text{かつ}\ (-s)^2-4t>0\quad\iff\quad t\neq\frac{1}{2}s-\frac{1}{4}\ \text{かつ}\ t<\frac{1}{4}s^2\quad\cdots②$$

が成り立つ．

このとき

$$①\iff\frac{1}{2}-\frac{1}{4}s-\frac{1}{2}s(s^2-2t)=0$$

$$\iff st=\frac{1}{2}s^3+\frac{1}{4}s-\frac{1}{2}\quad\cdots③$$

であるが，$s=0$ とすると③は成立しないので不適．よって $s\neq0$ より

③ $\iff$ $t=\dfrac{1}{2}s^2+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2s}$ $\cdots$④ とできるので，これを②へ代入して

$$\frac{1}{2}s^2+\frac{1}{4}-\frac{1}{2s}\neq\frac{1}{2}s-\frac{1}{4}\ \text{かつ}\ \frac{1}{2}s^2+\frac{1}{4}-\frac{1}{2s}<\frac{1}{4}s^2$$

$$\iff (s-1)(s^2+1)\neq0\ \text{かつ}\ s(s-1)(s^2+s+2)<0$$

ここで，$s^2+s+2=\left(s+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{7}{4}>0$ より $s(s-1)(s^2+s+2)<0\iff 0<s<1.$

このとき $(s-1)(s^2+1)\neq0$ を満たす．

このとき，$X=\dfrac{\alpha+\beta+\frac{1}{2}}{3}$ より $X=\dfrac{s}{3}+\dfrac{1}{6}\iff s=3X-\dfrac{1}{2}$ であるが，

$0<s<1$ より $0<3X-\dfrac{1}{2}<1\qquad\therefore\ \dfrac{1}{6}<X<\dfrac{1}{2}.$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

また，$Y=\dfrac{\alpha^2+\beta^2+\frac{1}{4}}{3}=\dfrac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+\frac{1}{4}}{3}=\dfrac{s^2-2t+\frac{1}{4}}{3}$ であるが，④より

$s^2-2t=\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{2}$ なので $Y=\dfrac{\frac{1}{s}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}{3}=\dfrac{1}{3s}-\dfrac{1}{12}$ となる．これに $s=3X-\dfrac{1}{2}$ を代入することで $Y=\dfrac{2}{18X-3}-\dfrac{1}{12}$ を得る．

以上より求める軌跡は，$\boldsymbol{Y=\dfrac{2}{18X-3}-\dfrac{1}{12}}\quad\boldsymbol{\left(\dfrac{1}{6}<X<\dfrac{1}{2}\right)}$.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

12　a，b を実数の定数とする．実数 x，y が

$$x^2+y^2\leqq 25,\quad 2x+y\leqq 5$$

をともに満たすとき，$z=x^2+y^2-2ax-2by$ の最小値を求めよ．

《13 東大・文科》

【答】

$$\begin{cases} \dfrac{(2a+b-5)^2}{5}-(a^2+b^2) & \left(2a+b>5 \text{ かつ } b\leqq\dfrac{1}{2}a+5 \text{ かつ } b\geqq\dfrac{1}{2}a-5 \text{ のとき}\right) \\ 25-10b & \left(b>\dfrac{1}{2}a+5 \text{ かつ } a>0 \text{ のとき}\right) \\ 25-8a+6b & \left(b<\dfrac{1}{2}a-5 \text{ かつ } b>-\dfrac{3}{4}a \text{ のとき}\right) \\ 25-10\sqrt{a^2+b^2} & \left(\left(a\leqq 0 \text{ または } b\leqq-\dfrac{3}{4}a\right) \text{ かつ } a^2+b^2>25 \text{ のとき}\right) \\ -(a^2+b^2) & (a^2+b^2\leqq 25 \text{ かつ } 2a+b\leqq 5 \text{ のとき}) \end{cases}$$

【解説】　$z=x^2+y^2-2ax-2by=(x-a)^2+(y-b)^2-(a^2+b^2)$ より，$(x,\ y)$ と $(a,\ b)$ との距離を d とおくと $z=d^2-(a^2+b^2)$ なので，d が最小になる場合を考えればよい．

円 $x^2+y^2=25$ と直線 $2x+y=5$ の 2 つの共有点は $(0,\ 5)$，$(4,\ -3)$ であり，これらを順に A，B とする．

$2x+y=5$ に垂直で A を通る直線は $y=\dfrac{1}{2}x+5$，$2x+y=5$ に垂直で B を通る直線は $y=\dfrac{1}{2}x-5$ であり，

また円 $x^2+y^2=25$ の中心 $(0,\ 0)$ と A を通る直線は $x=0$，中心 $(0,\ 0)$ と B を通る直線は $y=-\dfrac{3}{4}x$ となる．

(Ⅰ)　$2a+b>5$ かつ $b\leqq\dfrac{1}{2}a+5$ かつ $b\geqq\dfrac{1}{2}a-5$ のとき，

$(a,\ b)$ から直線 $2x+y=5$ に下ろした垂線の足を $(x,\ y)$ としたとき，d は最小になり，そのとき $d=\dfrac{|2a+b-5|}{\sqrt{2^2+1^2}}$ なので，z は最小値

$\left(\dfrac{|2a+b-5|}{\sqrt{5}}\right)^2-(a^2+b^2)=\dfrac{(2a+b-5)^2}{5}-(a^2+b^2)$ をとる．

(Ⅱ)　$b>\dfrac{1}{2}a+5$ かつ $a>0$ のとき，

$(x,\ y)=(0,\ 5)$ のとき，d は最小値 $d=\sqrt{a^2+(b-5)^2}$ をとるので，

z の最小値は $(\sqrt{a^2+(b-5)^2})^2-(a^2+b^2)=25-10b$

(Ⅲ)　$b<\dfrac{1}{2}a-5$ かつ $b>-\dfrac{3}{4}a$ のとき，

$(x,\ y)=(4,\ -3)$ のとき，d は最小値 $d=\sqrt{(a-4)^2+(b+3)^2}$ をとるので，

z の最小値は $(\sqrt{(a-4)^2+(b+3)^2})^2-(a^2+b^2)=25-8a+6b$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(Ⅳ)　$\left(a\leqq 0\text{ または }b\leqq -\dfrac{3}{4}a\right)$ かつ $a^2+b^2>25$ のとき，

$(x,\ y)=\left(\dfrac{5a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \dfrac{5b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ のとき，d は最小値 $d=\sqrt{a^2+b^2}-5$ をとるので，

z の最小値は $(\sqrt{a^2+b^2}-5)^2-(a^2+b^2)=25-10\sqrt{a^2+b^2}$

(Ⅴ)　$a^2+b^2\leqq 25$ かつ $2a+b\leqq 5$ のとき，

$(x,\ y)=(a,\ b)$ のとき，d は最小値 $d=0$ をとるので，z の最小値は $-(a^2+b^2)$

以上より，z の最小値は

$$\begin{cases} \dfrac{(2a+b-5)^2}{5}-(a^2+b^2) & \left(2a+b>5\text{ かつ }b\leqq\dfrac{1}{2}a+5\text{ かつ }b\geqq\dfrac{1}{2}a-5\text{ のとき}\right) \\ 25-10b & \left(b>\dfrac{1}{2}a+5\text{ かつ }a>0\text{ のとき}\right) \\ 25-8a+6b & \left(b<\dfrac{1}{2}a-5\text{ かつ }b>-\dfrac{3}{4}a\text{ のとき}\right) \\ 25-10\sqrt{a^2+b^2} & \left(\left(a\leqq 0\text{ または }b\leqq-\dfrac{3}{4}a\right)\text{ かつ }a^2+b^2>25\text{ のとき}\right) \\ -(a^2+b^2) & (a^2+b^2\leqq 25\text{ かつ }2a+b\leqq 5\text{ のとき}) \end{cases}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第４講　通過領域

13　正の実数 a に対して，座標平面上で次の放物線を考える．

$$C : y = ax^2 + \frac{1-4a^2}{4a}$$

a が正の実数全体を動くとき，C の通過する領域を図示せよ．

《15 東大・理科》

【答】 略

【解説】 $y = ax^2 + \dfrac{1-4a^2}{4a} \iff 4(x^2-1)a^2 - 4ya + 1 = 0$ を a の方程式とみて，これが正の実数解を少なくとも１つもつようなものを考える．

$f(a) = 4(x^2-1)a^2 - 4ya + 1$ とおくと，

(Ⅰ) $4(x^2-1) = 0$ つまり $x = \pm 1$ のとき，$f(a) = -4ya + 1$ で $f(0) = 1 > 0$ より，求める条件は $-4y < 0$ つまり $y > 0$.

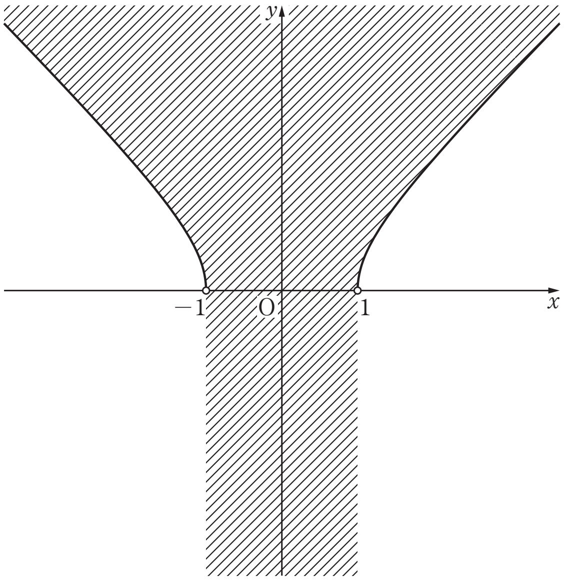
(Ⅱ) $4(x^2-1) \neq 0$ つまり $x \neq \pm 1$ のとき，

$f(0) = 1 > 0$ で $f(a) = 4(x^2-1)\left(a - \dfrac{y}{2(x^2-1)}\right)^2 + 1 - \dfrac{y^2}{x^2-1}$ なので，求める条件は

$$\left(4(x^2-1) > 0 \text{ かつ } 1 - \frac{y^2}{x^2-1} \leqq 0 \text{ かつ } \frac{y}{2(x^2-1)} > 0\right) \text{ または } 4(x^2-1) < 0$$

$$\iff (x^2 - y^2 \leqq 1 \text{ かつ } y > 0 \text{ かつ } x < -1,\ 1 < x) \text{ または } -1 < x < 1$$

以上より求める領域は，下図の $x = 1$ かつ $y \leqq 0$ と $x = -1$ かつ $y \leqq 0$を含まずに他の境界を含む斜線部分.



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

14　座標平面上の2点 A$(-1,\ 1)$, B$(1,\ -1)$ を考える．また，P を座標平面上の点とし，その x 座標の絶対値は1以下であるとする．次の条件(i)または(ii)をみたす点 P の範囲を図示し，その面積を求めよ．

(i)　頂点の x 座標の絶対値が1以上の2次関数のグラフで，点 A，P，B をすべて通るものがある．

(ii)　点 A，P，B は同一直線上にある．

《15 東大・文科》

【答】　面積は $\dfrac{4}{3}$

【解説】　A，B を通る直線または軸が y 軸と平行な放物線の方程式は実数の定数 a を用いて $y=a(x+1)(x-1)-x$　…①と表せる．P$(X,\ Y)$ とおくと，P は①上より $Y=a(X+1)(X-1)-X$　…②が成り立つ．また，P の x 座標の絶対値が1以下より $-1\leqq X\leqq 1$　…③である．

ここで $a\neq 0$ のとき①は $y=a\left(x-\dfrac{1}{2a}\right)^2-\dfrac{1}{4a}-a$ とできるので，条件(i)より $\dfrac{1}{2a}\leqq -1$, $\dfrac{1}{2a}\geqq 1$

この結果と条件(ii)つまり $a=0$ の場合を合わせて，$-\dfrac{1}{2}\leqq a\leqq \dfrac{1}{2}$　…④を得る．

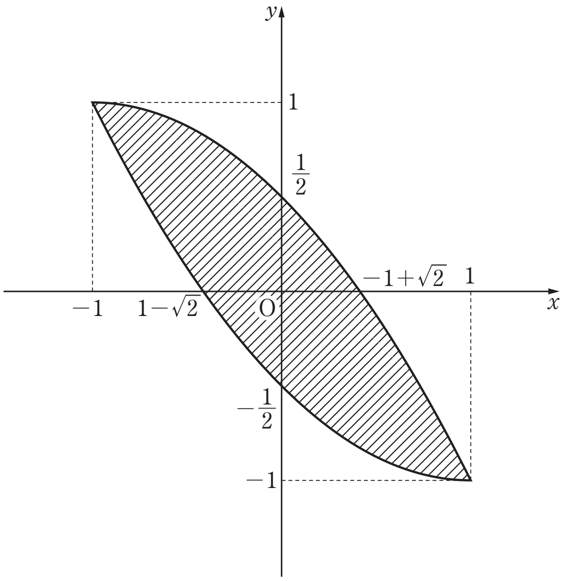
ここで，②　$\Longleftrightarrow$　$(X^2-1)a-(Y+X)=0$ なので，$f(a)=(X^2-1)a-(Y+X)$ とおいたとき，$f(a)=0$ が④の範囲に少なくとも1つ実数解をもつ条件を考えるとよいので

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)\times f\left(\frac{1}{2}\right)\leqq 0 \iff \left(-Y-\frac{1}{2}X^2-X+\frac{1}{2}\right)\left(-Y+\frac{1}{2}X^2-X-\frac{1}{2}\right)\leqq 0$$

$$\iff \left\{Y-\left(-\frac{1}{2}(X+1)^2+1\right)\right\}\left\{Y-\left(\frac{1}{2}(X-1)^2-1\right)\right\}\leqq 0$$

この条件と③より，求める P の領域は $y\leqq -\dfrac{1}{2}(x+1)^2+1$ かつ $y\geqq \dfrac{1}{2}(x-1)^2-1$ となり，次の図の境界を含む斜線部分．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。



その面積は

$$\int_{-1}^{1}\left\{\left(-\frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}x^2-x-\frac{1}{2}\right)\right\}dx=2\int_{0}^{1}(-x^2+1)dx=2\left[-\frac{x^3}{3}+x\right]_0^1=\boldsymbol{\frac{4}{3}}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

15 座標平面の原点をＯで表す．

線分 $y=\sqrt{3}x$ $(0\leqq x\leqq 2)$ 上の点Ｐと，線分 $y=-\sqrt{3}x$ $(-2\leqq x\leqq 0)$ 上の点Ｑが，線分OPと線分OQの長さの和が6となるように動く．このとき線分PQの通過する領域を D とする．

(1) s を $0\leqq s\leqq 2$ を満たす実数とするとき，点 $(s,\ t)$ が D に入るような t の範囲を求めよ．

(2) D を図示せよ．

《14 東大・理科(文科に類題)》

【答】 (1) $\begin{cases} -\dfrac{\sqrt{3}}{3}s+\dfrac{4}{3}\sqrt{3}\leqq t\leqq \dfrac{\sqrt{3}}{6}s^2+\dfrac{3\sqrt{3}}{2} & (0\leqq s\leqq 1 \text{のとき}) \\ \sqrt{3}s\leqq t\leqq \dfrac{\sqrt{3}}{3}s+\dfrac{4}{3}\sqrt{3} & (1< s\leqq 2 \text{のとき}) \end{cases}$　(2) 略

【解説】 (1) $\mathrm{OP}=\alpha$，$\mathrm{OQ}=\beta$ とすると，$\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{2}\alpha,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\alpha\right)$，$\mathrm{Q}\left(-\dfrac{1}{2}\beta,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\beta\right)$ と表せる．

このとき $\alpha+\beta=6$，$0\leqq \dfrac{1}{2}\alpha\leqq 2$，$-2\leqq -\dfrac{1}{2}\beta\leqq 0$ より $\alpha+\beta=6$，$2\leqq\alpha\leqq 4$，$2\leqq\beta\leqq 4$ となる．

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}(\alpha-\beta)\right)=\left(3,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}(\alpha-\beta)\right)$ なので，直線PQの傾きは $\dfrac{\sqrt{3}}{6}(\alpha-\beta)$ となる．

またPQの中点は，$\dfrac{\sqrt{3}}{4}(\alpha+\beta)=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ より $\left(\dfrac{\alpha-\beta}{4},\ \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ となる．

よって，線分PQは $y=\dfrac{\sqrt{3}}{6}(\alpha-\beta)\left(x-\dfrac{\alpha-\beta}{4}\right)+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ かつ $-\dfrac{\beta}{2}\leqq x\leqq\dfrac{\alpha}{2}$

つまり $y=\dfrac{\sqrt{3}}{6}(\alpha-\beta)x-\dfrac{\sqrt{3}}{24}(\alpha-\beta)^2+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ $\left(-\dfrac{\beta}{2}\leqq x\leqq\dfrac{\alpha}{2}\right)$ と表せる．

ここで点 $(s,\ t)$ が D に入るという条件は，点 $(s,\ t)$ がある線分PQ上にあるということだから，$t=\dfrac{\sqrt{3}}{6}(\alpha-\beta)s-\dfrac{\sqrt{3}}{24}(\alpha-\beta)^2+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ $\left(-\dfrac{\beta}{2}\leqq s\leqq\dfrac{\alpha}{2}\right)$ となる実数 α と β が存在するものを考えればよい．

ここで $0\leqq s\leqq 2$ かつ $-\dfrac{\beta}{2}\leqq s\leqq\dfrac{\alpha}{2}$ は，$2\leqq\alpha\leqq 4$ より，$0\leqq s\leqq\dfrac{\alpha}{2}$ である．$\alpha-\beta=u$ とおくと，$\alpha+\beta=6$ と $2\leqq\alpha\leqq 4$ より $\alpha=\dfrac{u+6}{2}$ かつ $-2\leqq u\leqq 2$ なので

$0\leqq s\leqq\dfrac{\alpha}{2}$ $\iff$ $0\leqq s\leqq\dfrac{u+6}{4}$ つまり $4s-6\leqq u$ だから，

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$t=\frac{\sqrt{3}}{6}us-\frac{\sqrt{3}}{24}u^2+\frac{3\sqrt{3}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{24}(u-2s)^2+\frac{\sqrt{3}}{6}s^2+\frac{3\sqrt{3}}{2}$ の $4s-6\leqq u$ かつ $-2\leqq u\leqq 2$ における t の値の範囲を求めればよい．

$f(u)=-\frac{\sqrt{3}}{24}(u-2s)^2+\frac{\sqrt{3}}{6}s^2+\frac{3\sqrt{3}}{2}$ とおくと，

(Ⅰ)　$0\leqq s\leqq 1$ のとき

$4s-6\leqq -2$，$0\leqq 2s\leqq 2$ より

$$f(-2)\leqq t\leqq f(2s) \iff -\frac{\sqrt{3}}{3}s+\frac{4}{3}\sqrt{3}\leqq t\leqq \frac{\sqrt{3}}{6}s^2+\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

(Ⅱ)　$1<s\leqq 2$ のとき

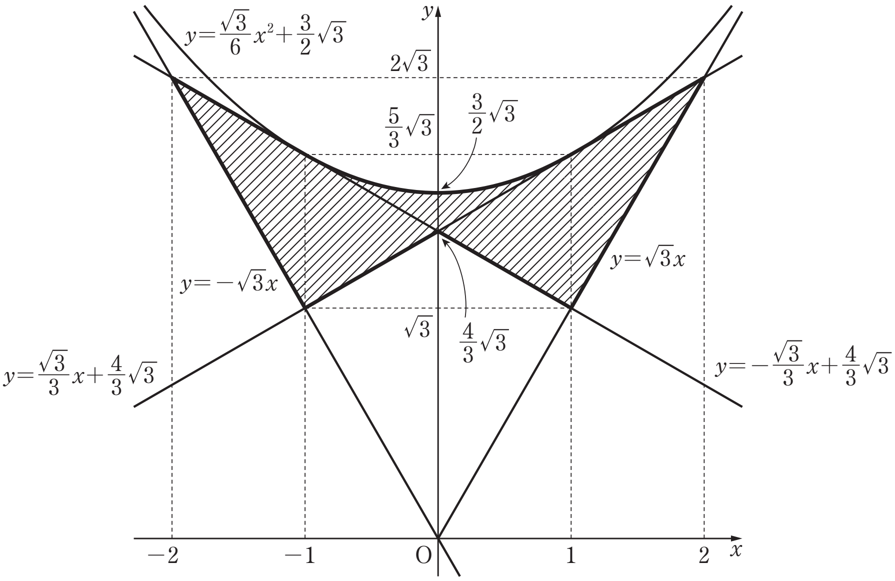
$-2<4s-6\leqq u\leqq 2<2s$ より

$$f(4s-6)\leqq t\leqq f(2) \iff \sqrt{3}s\leqq t\leqq \frac{\sqrt{3}}{3}s+\frac{4}{3}\sqrt{3}$$

以上より，求める t の範囲は

$$\begin{cases} -\frac{\sqrt{3}}{3}s+\frac{4}{3}\sqrt{3}\leqq t\leqq \frac{\sqrt{3}}{6}s^2+\frac{3\sqrt{3}}{2} & (0\leqq s\leqq 1 \text{ のとき}) \\ \sqrt{3}s\leqq t\leqq \frac{\sqrt{3}}{3}s+\frac{4}{3}\sqrt{3} & (1<s\leqq 2 \text{ のとき}) \end{cases}.$$

(2)　(1)の結果と y 軸に関する対称性より，求める領域は



©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第５講　数Ⅱの微積

16　座標平面上の放物線 C を $y=x^2+1$ で定める．s，t は実数とし $t<0$ を満たすとする．点 $(s,\ t)$ から放物線 C へ引いた接線を l_1，l_2 とする．

(1)　l_1，l_2 の方程式を求めよ．

(2)　a を正の実数とする．放物線 C と直線 l_1，l_2 で囲まれる領域の面積が a となる $(s,\ t)$ を全て求めよ．

《12 東大・文科》

【答】 (1)　$y=2(s\pm\sqrt{s^2-t+1})(x-s)+t$

(2)　$\begin{cases} a>\dfrac{2}{3} \text{ のとき } t=s^2+1-\left(\dfrac{3}{2}a\right)^{\frac{2}{3}} \text{ かつ } t<0 \\ 0<a\leqq\dfrac{2}{3} \text{ のとき面積が } a \text{ となる } (s,\ t) \text{ は存在しない.} \end{cases}$

【解説】 (1)　点 $(s,\ t)$ から放物線 C に引いた接線は y 軸と平行になることはないので，傾きを m として $y=m(x-s)+t$ と表せる．

この直線が C と接するので

$$x^2+1=m(x-s)+t \iff x^2-mx+sm-t+1=0 \quad \cdots①$$

が重解をもつ．

$$(-m)^2-4(sm-t+1)=0 \qquad \therefore \quad m^2-4sm+4t-4=0 \quad \cdots②$$

ここで $t<0$ なので $(-4s)^2-4(4t-4)=16(s^2-t+1)$ は正となるから，m に関する 2 次方程式②は異なる 2 つの実数解をもつので，小さい順に m_1，m_2 とすると

$m_1=2s-2\sqrt{s^2-t+1}$，$m_2=2s+2\sqrt{s^2-t+1}$ となる．

よって l_1 と l_2 の方程式は

$y=m_1(x-s)+t$ と $y=m_2(x-s)+t$　　$\therefore$　$\boldsymbol{y=2(s\pm\sqrt{s^2-t+1})(x-s)+t}$.

(2)　②より①　$\iff$　$\left(x-\dfrac{m}{2}\right)^2=0$ となるので，$y=m_1(x-s)+t$ と C との接点の x 座標は $\dfrac{m_1}{2}$，$y=m_2(x-s)+t$ と C との接点の x 座標は $\dfrac{m_2}{2}$ であり $y=m_1(x-s)+t$ と $y=m_2(x-s)+t$ の交点の x 座標は $m_2(x-s)+t=m_1(x-s)+t$ より $x=s$ となる．

$\dfrac{m_1}{2}$ と $\dfrac{m_2}{2}$ を順に α，β とおくと C と l_1 と l_2 で囲まれる領域の面積は

$$\begin{aligned}
&\int_\alpha^s\{(x^2+1)-(m_1(x-s)+t)\}dx+\int_s^\beta\{(x^2+1)-(m_2(x-s)+t)\}dx \\
&=\int_\alpha^s(x-\alpha)^2dx+\int_s^\beta(x-\beta)^2dx \\
&=\left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3\right]_\alpha^s+\left[\frac{1}{3}(x-\beta)^3\right]_s^\beta \\
&=\frac{1}{3}(s-\alpha)^3-\frac{1}{3}(s-\beta)^3=\frac{2}{3}(s^2-t+1)^{\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

となる．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

ここで $t<0$, $s^2 \geqq 0$ より $s^2-t+1>1$ なので $\frac{2}{3}(s^2-t+1)^{\frac{3}{2}}>\frac{2}{3}$.

よって $a>\frac{2}{3}$ のとき $\frac{2}{3}(s^2-t+1)^{\frac{3}{2}}=a \iff t=s^2+1-\left(\frac{3}{2}a\right)^{\frac{2}{3}}$ かつ $t<0$

また $0<a \leqq \frac{2}{3}$ のとき囲まれる部分が a となることはない.

以上より求める軌跡は $\boldsymbol{t=s^2+1-\left(\frac{3}{2}a\right)^{\frac{2}{3}}}$ **かつ** $\boldsymbol{t<0}$ $\left(\boldsymbol{a>\frac{2}{3}}\right)$.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

17 関数 $y=x(x-1)(x-3)$ のグラフを C，原点Oを通る傾き t の直線を l とし，C と l がO以外に共有点をもつとする．C と l の共有点をO，P，Qとし，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ と $|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$ の積を $g(t)$ とおく．ただし，それらの共有点の１つが接点である場合は，O，P，Qのうちの２つが一致して，その接点であるとする．関数 $g(t)$ の増減を調べ，その極値を求めよ．

《13東大・文科》

【答】 極小値 $\dfrac{36-4\sqrt{6}}{9}$ $\left(t=\dfrac{3-\sqrt{6}}{3}\right)$，0 $(t=3)$，極大値 $\dfrac{36+4\sqrt{6}}{9}$ $\left(t=\dfrac{3+\sqrt{6}}{3}\right)$

【解説】 l は $y=tx$ と表せるので，これと C の式を連立して

$$x(x-1)(x-3)=tx \iff x(x^2-4x+3-t)=0$$

ここで $x^2-4x+3-t=0$ は実数解をもつので $(-4)^2-4\cdot1\cdot(3-t)\geqq0$　∴ $t\geqq-1$ であり，その実数解を α，β とすると，解と係数の関係より $\alpha+\beta=4$，$\alpha\beta=3-t$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(\alpha,\ t\alpha)$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(\beta,\ t\beta)$ と表せる．

このとき $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=|\alpha|\sqrt{1+t^2}$，$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=|\beta|\sqrt{1+t^2}$ より
$g(t)=|\alpha\beta|(1+t^2)=|3-t|(1+t^2)$ となる．

よって $g(t)=\begin{cases}-(t-3)(t^2+1) & (-1\leqq t\leqq3\ のとき)\\ (t-3)(t^2+1) & (t>3\ のとき)\end{cases}$

ここで，$f(t)=-(t-3)(t^2+1)$ とおくと，$f(t)=-t^3+3t^2-t+3$ より

$f'(t)=-3t^2+6t-1=-3\left(t-\dfrac{3-\sqrt{6}}{3}\right)\left(t-\dfrac{3+\sqrt{6}}{3}\right)$ となることより，$g(t)$ の増減は

t	-1	$\cdots$	$\dfrac{3-\sqrt{6}}{3}$	$\cdots$	$\dfrac{3+\sqrt{6}}{3}$	$\cdots$	3	$\cdots$
$g'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$		$+$
$g(t)$		↘		↗		↘		↗

ここで $f\left(\dfrac{3-\sqrt{6}}{3}\right)=\dfrac{36-4\sqrt{6}}{9}$，$f(3)=0$，$f\left(\dfrac{3+\sqrt{6}}{3}\right)=\dfrac{36+4\sqrt{6}}{9}$ より

極小値 $\dfrac{36-4\sqrt{6}}{9}$ $\left(t=\dfrac{3-\sqrt{6}}{3}\right)$，$0(t=3)$，極大値 $\dfrac{36+4\sqrt{6}}{9}$ $\left(t=\dfrac{3+\sqrt{6}}{3}\right)$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

18 以下の問いに答えよ．

(1) t を実数の定数とする．実数全体を定義域とする関数 $f(x)$ を

$$f(x)=-2x^2+8tx-12x+t^3-17t^2+39t-18$$

と定める．このとき，関数 $f(x)$ の最大値を t を用いて表せ．

(2) (1)の「関数 $f(x)$ の最大値」を $g(t)$ とする．t が $t \geqq -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の範囲を動くとき，$g(t)$ の最小値を求めよ．

《14 東大・文科》

【答】 (1) 最大値 t^3-9t^2+15t $(x=2t-3)$　　(2) 最小値 -25 $(t=5)$

【解説】 (1) $f(x)=-2(x-2t+3)^2+t^3-9t^2+15t$ より $f(x)$ は $\boldsymbol{x=2t-3}$ のとき最大値 $\boldsymbol{t^3-9t^2+15t}$ をとる．

(2) $g(t)=t^3-9t^2+15t$ であるので，$g'(t)=3t^2-18t+15=3(t-1)(t-5)$ より $g(t)$ の増減は

t	$\cdots$	1	$\cdots$	5	$\cdots$
$g'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(t)$	↗		↘		↗

となる．

ここで，$g(-1)=g(5)=-25$，$-1<-\dfrac{1}{\sqrt{2}}<1$ より，$t \geqq -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ における $g(t)$ の最小値は $\boldsymbol{-25\ (t=5)}$．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

19 3辺の長さが a と b と c の直方体を，長さが b の1辺を回転軸として 90° 回転させるとき，直方体が通過する点全体がつくる立体を V とする．

(1) V の体積を a，b，c を用いて表せ．

(2) $a+b+c=1$ のとき，V の体積のとりうる値の範囲を求めよ．

《10 東大・理科》

【答】 (1) $\dfrac{\pi}{4}b(a^2+c^2)+abc$　　(2) 0より大きく $\dfrac{\pi}{27}$ 未満

【解説】 (1) 求める体積は，2辺の長さが b，$\sqrt{a^2+c^2}$ の長方形の長さ b の辺を軸に 90° 回転して得られる立体の体積 V_1 と，与えられた直方体の体積を加えたものなので

$$V_1=(\sqrt{a^2+c^2})^2\times\pi\times b\times\frac{1}{4}=\frac{\pi}{4}b(a^2+c^2)$$

より，求める体積は $\boldsymbol{\dfrac{\pi}{4}b(a^2+c^2)+abc}$.

(2) $a+c=p$，$ac=q$ とおくと，a と c は $x^2-px+q=0$ の2つの正の実数解より

$$\begin{cases}(-p)^2-4q\geqq 0\\ a>0\\ c>0\end{cases}\iff\begin{cases}p^2-4q\geqq 0\\ a+c>0\\ ac>0\end{cases}\text{より}\begin{cases}q\leqq\dfrac{1}{4}p^2 & \cdots①\\ p>0 & \cdots②\\ q>0 & \cdots③\end{cases}\text{となる.}$$

ここで $a+b+c=1$ より $p+b=1$,これと $b>0$, ②より $b=1-p$ $(0<p<1)$ となるので，

$$\frac{\pi}{4}b(a^2+c^2)+abc=\frac{\pi}{4}(1-p)(p^2-2q)+(1-p)q$$

この式を q の関数とみて $f(q)$ とおくと，$f(q)=\left(1-\dfrac{\pi}{2}\right)(1-p)q+\dfrac{\pi}{4}(1-p)p^2$ であり，

①，③より $0<q\leqq\dfrac{p^2}{4}$ であることと $\left(1-\dfrac{\pi}{2}\right)(1-p)<0$ より $f\left(\dfrac{p^2}{4}\right)\leqq f(q)<f(0)$ つまり

$\dfrac{1}{4}\left(1+\dfrac{\pi}{2}\right)p^2(1-p)\leqq f(q)<\dfrac{\pi}{4}p^2(1-p)$ となる．

ここで $p^2(1-p)=g(p)$ とおくと $g'(p)=p(2-3p)$ と $0<p<1$ より $g(p)$ の増減は

p	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	1
$g'(p)$		$+$	0	$-$	
$g(p)$	0	↗	$\frac{4}{27}$	↘	0

となるので $0<g(p)\leqq\dfrac{4}{27}$ である．

よって $0<\dfrac{1}{4}\left(1+\dfrac{\pi}{2}\right)p^2(1-p)\leqq\dfrac{1}{27}\left(1+\dfrac{\pi}{2}\right)$，$0<\dfrac{\pi}{4}p^2(1-p)\leqq\dfrac{\pi}{27}$ なので，

$0<f(q)<\dfrac{\pi}{27}$ となる．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

ゆえに V の体積のとりうる範囲は **0 より大きく $\dfrac{\pi}{27}$ 未満**.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第6講　計算練習

20　2次関数 $f(x)=x^2+ax+b$ に対して

$$f(x+1)=c\int_0^1(3x^2+4xt)f'(t)dt$$

が x についての恒等式になるような定数 a, b, c の組をすべて求めよ.

《10東大・文科》

【答】 $(a,\ b,\ c)=\left(-\dfrac{5}{3},\ \dfrac{2}{3},\ -\dfrac{1}{2}\right),\ \left(-\dfrac{2}{3},\ -\dfrac{1}{3},\ 1\right)$

【解説】 $f(x+1)=(x+1)^2+a(x+1)+b=x^2+(a+2)x+(a+b+1)$ …①である.

また $f'(x)=2x+a$ より

$$\begin{aligned}c\int_0^1(3x^2+4xt)f'(t)dt&=c\int_0^1(3x^2+4xt)(2t+a)dt\\&=c\int_0^1\{8xt^2+2(3x^2+2ax)t+3ax^2\}dt\\&=c\left[\frac{8}{3}xt^3+(3x^2+2ax)t^2+3ax^2t\right]_0^1\\&=3(a+1)cx^2+\left(2a+\frac{8}{3}\right)cx\quad\cdots②\end{aligned}$$

となる.

①と②が恒等的に等しいので $\begin{cases}3(a+1)c=1 & \cdots③\\ \left(2a+\dfrac{8}{3}\right)c=a+2 & \cdots④\\ 0=a+b+1 & \cdots⑤\end{cases}$ が成り立つ.

③より $a+1\neq0$ なので③ $\iff$ $c=\dfrac{1}{3(a+1)}$ を④に代入して

$$\left(2a+\frac{8}{3}\right)\cdot\frac{1}{3(a+1)}=a+2 \iff (3a+5)(3a+2)=0 \text{ かつ } a\neq-1$$

$$\therefore\quad a=-\frac{5}{3},\ -\frac{2}{3}$$

これと③, ⑤より $\boldsymbol{(a,\ b,\ c)=\left(-\dfrac{5}{3},\ \dfrac{2}{3},\ -\dfrac{1}{2}\right),\ \left(-\dfrac{2}{3},\ -\dfrac{1}{3},\ 1\right)}$.

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

21　x の3次関数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ が，3つの条件

$$f(1)=1,\ f(-1)=-1,\ \int_{-1}^{1}(bx^2+cx+d)dx=1$$

を全て満たしているとする．このような $f(x)$ の中で定積分

$$I=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\{f''(x)\}^2dx$$

を最小にするものを求め，そのときの I の値を求めよ．ただし，$f''(x)$ は $f'(x)$ の導関数を表す．

《11 東大・文科》

【答】 $f(x)=-\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{4}x^2+\frac{5}{4}x+\frac{3}{4}$，最小値 $\frac{81}{32}$

【解説】 $f'(x)=3ax^2+2bx+c$，$f''(x)=6ax+2b$ である．

$f(1)=1$ より $a+b+c+d=1$ …①

$f(-1)=-1$ より $-a+b-c+d=-1$ …②

$\int_{-1}^{1}(bx^2+cx+d)dx=2\int_{0}^{1}(bx^2+d)dx=2\left[\frac{1}{3}bx^3+dx\right]_0^1=\frac{2}{3}b+2d=1$ …③

①＋②より $2b+2d=0$　　∴　$d=-b$

これと③より $b=-\frac{3}{4}$，よって $d=\frac{3}{4}$．

これらと①より $a+c=1$　　∴　$c=1-a$ である．

また $f''(x)=6ax-\frac{3}{2}$ より

$$\begin{aligned}I&=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\{f''(x)\}^2dx\\&=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\left(6ax-\frac{3}{2}\right)^2dx\\&=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\left(36a^2x^2-18ax+\frac{9}{4}\right)dx\\&=\left[12a^2x^3-9ax^2+\frac{9}{4}x\right]_{-1}^{\frac{1}{2}}\\&=\frac{27}{2}a^2+\frac{27}{4}a+\frac{27}{8}\\&=\frac{27}{2}\left(a+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{81}{32}\end{aligned}$$

となるので，$a=-\frac{1}{4}$ のとき I は**最小値 $\frac{81}{32}$** をとり，このとき

$\boldsymbol{f(x)=-\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{4}x^2+\frac{5}{4}x+\frac{3}{4}}$ である．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

22 1辺の長さが1の正方形を底面とする四角柱OABC－DEFGを考える．3点P，Q，Rを，それぞれ辺AE，辺BF，辺CG上に，4点O，P，Q，Rが同一平面上にあるようにとる．四角形OPQRの面積をSとおく．また$\angle$AOPをα，$\angle$CORをβとおく．

(1) Sを$\tan\alpha$と$\tan\beta$で表せ．

(2) $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$，$S=\dfrac{7}{6}$であるとき，$\tan\alpha+\tan\beta$の値を求めよ．さらに，$\alpha\leqq\beta$のとき，$\tan\alpha$の値を求めよ．

《14東大・理科》

※本問は，授業の進め方の都合上，東京大学の入試問題に記載された図を記載しておりません。

【答】 (1) $S=\sqrt{1+\tan^2\alpha+\tan^2\beta}$　　(2) $\tan\alpha+\tan\beta=\dfrac{5}{6}$，$\tan\alpha=\dfrac{1}{3}$

【解説】 (1) O(0, 0, 0)，A(1, 0, 0)，B(1, 1, 0)，C(0, 1, 0)として，Dをz軸上のz座標が正の部分にとることができる．

このとき，P(1, 0, $\tan\alpha$)，R(0, 1, $\tan\beta$) $\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2},\ 0<\beta<\dfrac{\pi}{2}\right)$と表せるので，

$$S=\sqrt{|\overrightarrow{OP}|^2|\overrightarrow{OR}|^2-(\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OR})^2}=\sqrt{(1+\tan^2\alpha)(1+\tan^2\beta)-(\tan\alpha\tan\beta)^2}$$
$$=\boldsymbol{\sqrt{1+\tan^2\alpha+\tan^2\beta}}$$

(2) $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=1$より$\tan\alpha+\tan\beta=p$，$\tan\alpha\tan\beta=q$とおくと

$1=\dfrac{p}{1-q}$つまり$q=1-p$である．

また$S=\dfrac{7}{6}$と(1)の結果より$\dfrac{7}{6}=\sqrt{1+p^2-2q}\iff\dfrac{13}{36}=p^2-2q$となるが，

$q=1-p$を代入して

$\dfrac{13}{36}=p^2-2q\iff\dfrac{13}{36}=p^2-2(1-p)\iff\left(p+\dfrac{17}{6}\right)\left(p-\dfrac{5}{6}\right)=0$なので$\boldsymbol{p=\dfrac{5}{6}}$．

このとき$q=1-p=\dfrac{1}{6}$より，$\tan\alpha$と$\tan\beta$は

$x^2-\dfrac{5}{6}x+\dfrac{1}{6}=0\iff\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\left(x-\dfrac{1}{3}\right)=0$の2解となる．ここで

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$，$\tan\alpha\leqq\tan\beta$より$\boldsymbol{\tan\alpha=\dfrac{1}{3}}$．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

23 Oを原点とする座標平面上に $A(-3,\ 0)$ をとり，$0^\circ<\theta<120^\circ$ の範囲にある θ に対して，次の条件(ⅰ)，(ⅱ)をみたす2点B，Cを考える．

(ⅰ) Bは $y>0$ の部分にあり，$OB=2$ かつ $\angle AOB=180^\circ-\theta$ である．

(ⅱ) Cは $y<0$ の部分にあり，$OC=1$ かつ $\angle BOC=120^\circ$ である．ただし $\triangle ABC$ はOを含むものとする．

以下の問(1)，(2)に答えよ．

(1) $\triangle OAB$ と $\triangle OAC$ の面積が等しいとき，θ の値を求めよ．

(2) θ を $0^\circ<\theta<120^\circ$ の範囲で動かすとき，$\triangle OAB$ と $\triangle OAC$ の面積の和の最大値と，そのときの $\sin\theta$ の値を求めよ．

《10 東大・文科》

【答】 (1) $\theta=30^\circ$　　(2) 最大値は $\dfrac{3\sqrt{7}}{2}$，$\sin\theta=\dfrac{5}{14}\sqrt{7}$

【解説】 (1) 題意より，$\triangle OAB$ の面積は $\dfrac{1}{2}\times OA\times OB\times\sin(180^\circ-\theta)=3\sin\theta$ となり，

$\angle AOC=360^\circ-120^\circ-(180^\circ-\theta)=\theta+60^\circ$ より $\triangle OAC$ の面積は

$\dfrac{1}{2}\times OA\times OC\times\sin(\theta+60^\circ)=\dfrac{3}{2}\sin(\theta+60^\circ)$ となるので，

$$3\sin\theta=\frac{3}{2}\sin(\theta+60^\circ)\iff 3\sin\theta=\frac{3}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta\right)$$
$$\iff 3\sin\theta=\frac{3\sqrt{3}}{4}\cos\theta+\frac{3}{4}\sin\theta$$
$$\iff \frac{9}{4}\sin\theta-\frac{3\sqrt{3}}{4}\cos\theta=0$$
$$\iff \frac{3\sqrt{3}}{2}\sin(\theta-30^\circ)=0$$

$0^\circ<\theta<120^\circ$ より $\boldsymbol{\theta=30^\circ}$．

(2) $\triangle OAB$ と $\triangle OAC$ の面積の和は

$$3\sin\theta+\frac{3}{2}\sin(\theta+60^\circ)=\frac{15}{4}\sin\theta+\frac{3\sqrt{3}}{4}\cos\theta$$
$$=\frac{3\sqrt{7}}{2}\sin(\theta+\alpha)$$

となる．ただし，α は $0^\circ<\alpha<90^\circ$ かつ $\cos\alpha=\dfrac{5}{14}\sqrt{7}$ を満たす角である．

ここで，$\alpha<\theta+\alpha<120^\circ+\alpha$ より面積の和は $\theta+\alpha=90^\circ$ つまり $\theta=90^\circ-\alpha$ のときに**最大値** $\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{7}}{2}}$ をとる．

このとき $\boldsymbol{\sin\theta}=\sin(90^\circ-\alpha)=\cos\alpha\boldsymbol{=\dfrac{5}{14}\sqrt{7}}$ である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第７講　小道具の使い方

24 実数 t は $0<t<1$ を満たすとし，座標平面上の４点 O(0，0)，A(0，1)，B(1，0)，C(t，0) を考える．また線分 AB 上の点 D を ∠ACO＝∠BCD となるように定める．
t を動かしたときの三角形 ACD の面積の最大値を求めよ．

《12 東大・文科》

【答】 最大値 $3-2\sqrt{2}$　$(t=\sqrt{2}-1)$

【解説】 AC の傾きは $-\dfrac{1}{t}$ なので，直線 AC の式は $y=-\dfrac{1}{t}x+1$ となり，直線 AC と x 軸に関して対称なものが直線 CD なので，その式は $-y=-\dfrac{1}{t}x+1$ つまり $y=\dfrac{1}{t}x-1$ となる．

これと直線 AB の式 $x+y=1$ を連立することで $\mathrm{D}\left(\dfrac{2t}{1+t},\ \dfrac{1-t}{1+t}\right)$ を得る．

三角形 ACD の面積は，三角形 OAC の面積と三角形 BCD の面積の和を三角形 OAB の面積から引いたものだから，三角形 ACD の面積は

$$\frac{1}{2}-\left\{\frac{1}{2}\times t\times 1+\frac{1}{2}\times(1-t)\times\frac{1-t}{1+t}\right\}=\frac{t(1-t)}{1+t}$$
$$=3-\left(1+t+\frac{2}{1+t}\right)$$

となる．

ここで $1+t>0$，$\dfrac{2}{1+t}>0$ なので，相加平均と相乗平均の関係を用いると

$$1+t+\frac{2}{1+t}\geqq 2\sqrt{(1+t)\cdot\frac{2}{1+t}}=2\sqrt{2}$$

が成り立つ．等号成立は $1+t=\dfrac{2}{1+t}$ のときで，$0<t<1$ を満たすものは $t=\sqrt{2}-1$．

よって三角形 ACD の面積の最大値は $\boldsymbol{3-2\sqrt{2}}$　$\boldsymbol{(t=\sqrt{2}-1)}$．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

25 l を座標平面上の原点を通り傾きが正の直線とする．さらに，以下の 3 条件(ⅰ)，(ⅱ)，(ⅲ)で定まる円 C_1，C_2 を考える．

(ⅰ) 円 C_1，C_2 は 2 つの不等式 $x \geqq 0$，$y \geqq 0$ で定まる領域に含まれる．

(ⅱ) 円 C_1，C_2 は直線 l と同一点で接する．

(ⅲ) 円 C_1 は x 軸と点 $(1,\ 0)$ で接し，円 C_2 は y 軸と接する．

円 C_1 の半径を r_1，円 C_2 の半径を r_2 とする．$8r_1+9r_2$ が最小となるような直線 l の方程式と，その最小値を求めよ．

《15 東大・文科》

【答】 l は $y=\dfrac{4}{3}x$，最小値は 7

【解説】 円外の 1 点から円に引いた 2 本の接線の長さは等しいので，C_2 は y 軸と $(0,\ 1)$ で接することになる．

ここで θ_1 と θ_2 を 0 より大きく $\dfrac{\pi}{4}$ 未満の角として，$\tan\theta_1=r_1$，$\tan\theta_2=r_2$ を満たすものとすると，$\theta_1+\theta_2=\dfrac{\pi}{4}$ より

$r_2=\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta_1\right)=\dfrac{\tan\dfrac{\pi}{4}-\tan\theta_1}{1+\tan\dfrac{\pi}{4}\tan\theta_1}=\dfrac{1-r_1}{1+r_1}$ となる．

このとき

$$8r_1+9r_2=8r_1+9\times\frac{1-r_1}{1+r_1}=8(r_1+1)+\frac{18}{r_1+1}-17$$

であるが，$8(r_1+1)>0$，$\dfrac{18}{r_1+1}>0$ より相加平均と相乗平均の関係を用いて

$$8(r_1+1)+\frac{18}{r_1+1}\geqq 2\sqrt{8(r_1+1)\cdot\frac{18}{r_1+1}}=24$$

が成立する．等号は $8(r_1+1)=\dfrac{18}{r_1+1}$ のとき，つまり $r_1=\dfrac{1}{2}$ のときに成り立つ．（これは $0<r_1<1$ をみたす．）

よって，求める最小値は $24-17=\mathbf{7}$ で，そのときの直線の傾きは $\tan 2\theta_1=\dfrac{2r_1}{1-{r_1}^2}=\dfrac{4}{3}$ より，直線 l は $\boldsymbol{y=\dfrac{4}{3}x}$．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

26 以下の命題 A，B それぞれに対し，その真偽を述べよ．また，真ならば証明を与え，偽ならば反例を与えよ．

命題 A　n が正の整数ならば，$\dfrac{n^3}{26}+100\geqq n^2$ が成り立つ．

命題 B　整数 n，m，l が $5n+5m+3l=1$ をみたすならば，$10nm+3ml+3nl<0$ が成り立つ．

《15 東大・文科》

【答】（1）偽，反例は $n=17$　（2）真

【解説】（1）$\boldsymbol{n=17}$ とすると $\dfrac{17^3}{26}+100-17^2=-\dfrac{1}{26}<0$ より，**偽**.

（2）$5n+5m+3l=1 \iff 3l=1-5n-5m$ より

$$
\begin{aligned}
10nm+3ml+3nl &= 10nm+3l(n+m)\\
&= 10nm+(1-5n-5m)(n+m)\\
&= -5n^2-5m^2+n+m\\
&= n(1-5n)+m(1-5m)
\end{aligned}
$$

である．ここで n は整数より，$n\neq 0$ のとき n，$1-5n$ は異符号となるので，$n(1-5n)<0$．また $n=0$ のとき $n(1-5n)=0$ である．

同様に，$m=0$ のとき $m(1-5m)=0$ であり，$m\neq 0$ のとき $m(1-5m)<0$ となる．

ここで $n=m=0$ とすると $5n+5m+3l=1$ を満たす整数 l が存在しないことになるので，n と m は同時に 0 になることはない．

よって $n(1-5n)+m(1-5m)<0$ となる．

したがって，命題 B は**真**.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

27 座標平面上の点 $(x,\ y)$ が次の方程式を満たす.

$$2x^2+4xy+3y^2+4x+5y-4=0$$

このとき，x のとりうる最大の値を求めよ.

《12 東大・文科》

【答】 最大値 $\dfrac{-2+5\sqrt{6}}{4}$ $\left(y=-\dfrac{3+5\sqrt{6}}{6}\right)$

【解説】 与式を y の 2 次方程式とみた

$$3y^2+(4x+5)y+2x^2+4x-4=0 \quad \cdots①$$

が実数解をもつので，

$$(4x+5)^2-4\cdot3\cdot(2x^2+4x-4)\geqq0 \iff 8x^2+8x-73\leqq0$$

$$\therefore \quad \frac{-2-5\sqrt{6}}{4}\leqq x\leqq\frac{-2+5\sqrt{6}}{4}$$

である．ここで $x=\dfrac{-2+5\sqrt{6}}{4}$ のとき①より $y=-\dfrac{1}{6}(4x+5)=-\dfrac{3+5\sqrt{6}}{6}$

よって求める最大値は $\boldsymbol{\dfrac{-2+5\sqrt{6}}{4}}$ $\boldsymbol{\left(y=-\dfrac{3+5\sqrt{6}}{6}\right)}$.

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第８講　基本なんだけど…

28 数列 $\{p_n\}$ を次のように定める.

$$p_1=1,\ p_2=2,\ p_{n+2}=\frac{{p_{n+1}}^2+1}{p_n}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1) $\dfrac{{p_{n+1}}^2+{p_n}^2+1}{p_{n+1}p_n}$ が n によらないことを示せ.

(2) すべての $n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$ に対し，$p_{n+1}+p_{n-1}$ を p_n のみを使って表せ.

(3) 数列 $\{q_n\}$ を次のように定める.

$$q_1=1,\ q_2=1,\ q_{n+2}=q_{n+1}+q_n\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

すべての $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し，$p_n=q_{2n-1}$ を示せ.

《15 東大・理科》

【答】 (1) 略　(2) $p_{n+1}+p_{n-1}=3p_n$　(3) 略

【解説】 (1)

$$\frac{{p_{n+2}}^2+{p_{n+1}}^2+1}{p_{n+2}p_{n+1}}=\frac{\left(\dfrac{{p_{n+1}}^2+1}{p_n}\right)^2+{p_{n+1}}^2+1}{\dfrac{{p_{n+1}}^2+1}{p_n}\cdot p_{n+1}}$$

$$=\frac{({p_{n+1}}^2+1)^2+({p_{n+1}}^2+1){p_n}^2}{({p_{n+1}}^2+1)\cdot p_{n+1}p_n}=\frac{{p_{n+1}}^2+{p_n}^2+1}{p_{n+1}p_n}$$ なので,

$\dfrac{{p_{n+1}}^2+{p_n}^2+1}{p_{n+1}p_n}=\dfrac{{p_2}^2+{p_1}^2+1}{p_2p_1}=3$. よって $\dfrac{{p_{n+1}}^2+{p_n}^2+1}{p_{n+1}p_n}$ は n によらない一定の値 3 をとる.

(2) $p_{n+2}=\dfrac{{p_{n+1}}^2+1}{p_n}$ より ${p_{n+1}}^2+1=p_{n+2}p_n$. これと(1)の結果の $\dfrac{{p_{n+1}}^2+{p_n}^2+1}{p_{n+1}p_n}=3$ より

$\dfrac{p_{n+2}p_n+{p_n}^2}{p_{n+1}p_n}=3$.

ゆえに $\dfrac{p_{n+2}+p_n}{p_{n+1}}=3 \iff p_{n+2}+p_n=3p_{n+1}\ (n\geqq 1)$ が成り立つ.

よって $\boldsymbol{p_{n+1}+p_{n-1}=3p_n}$.

(3) (2)の結果より，$n\geqq 1$ のとき，$p_{n+2}=3p_{n+1}-p_n$ が成り立つ.

$p_1=1$，$q_1=1$ より，$n=1$ のとき $p_n=q_{2n-1}$ が成り立つ. $p_2=2$，$q_3=q_2+q_1=2$ より，$n=2$ のとき $p_n=q_{2n-1}$ が成り立つ.

ここで，$n=k(\geqq 1)$ のとき，$p_k=q_{2k-1}$，$p_{k+1}=q_{2k+1}$ が成り立つことを仮定するとき，$p_{k+2}=3p_{k+1}-p_k$ であり,

$$q_{2k+3}=q_{2k+2}+q_{2k+1}=(q_{2k+1}+q_{2k})+q_{2k+1}=\{q_{2k+1}+(q_{2k+1}-q_{2k-1})\}+q_{2k+1}$$
$$=3q_{2k+1}-q_{2k-1}=3p_{k+1}-p_k$$

となるので，$p_{k+2}=q_{2k+3}$，つまり $n=k+2$ のときにも $p_n=q_{2n-1}$ が成り立つ.

以上より，数学的帰納法を用いて $p_n=q_{2n-1}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ が示された.

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

29 △ABC において ∠BAC＝90°，$|\overrightarrow{AB}|=1$，$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{3}$ とする．△ABC の内部の点 P が

$$\frac{\overrightarrow{PA}}{|\overrightarrow{PA}|}+\frac{\overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{PB}|}+\frac{\overrightarrow{PC}}{|\overrightarrow{PC}|}=\vec{0}$$

を満たすとする．

(1) ∠APB，∠APC を求めよ．

(2) $|\overrightarrow{PA}|$，$|\overrightarrow{PB}|$，$|\overrightarrow{PC}|$ を求めよ．

《13 東大・理科》

【答】 (1) ∠APB＝∠APC＝120°　(2) $|\overrightarrow{PA}|=\dfrac{1}{\sqrt{7}}$，$|\overrightarrow{PB}|=\dfrac{2}{\sqrt{7}}$，$|\overrightarrow{PC}|=\dfrac{4}{\sqrt{7}}$

【解説】 (1) $\dfrac{\overrightarrow{PA}}{|\overrightarrow{PA}|}=\vec{a}$ とおくと，$|\vec{a}|=\left|\dfrac{\overrightarrow{PA}}{|\overrightarrow{PA}|}\right|=\dfrac{|\overrightarrow{PA}|}{|\overrightarrow{PA}|}=1$ である．同様に $\dfrac{\overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{PB}|}=\vec{b}$，$\dfrac{\overrightarrow{PC}}{|\overrightarrow{PC}|}=\vec{c}$ とおくと $|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$．このとき $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ より $\vec{c}=-\vec{a}-\vec{b}$ なので

$|\vec{c}|^2=|-\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}$．これと $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$ より $\vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{1}{2}$．

ここで，∠APB は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角のことなので $\cos\angle APB=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=-\dfrac{1}{2}$，つまり

∠APB＝120°.

また $\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(-\vec{a}-\vec{b})=-|\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{1}{2}$ より同様に $\cos\angle APC=-\dfrac{1}{2}$

∴　**∠APC＝120°**.

(2) $|\overrightarrow{PA}|$，$|\overrightarrow{PB}|$，$|\overrightarrow{PC}|$ を順に α，β，γ とおく．

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{PB}|}=-\dfrac{1}{2}$ より $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=-\dfrac{1}{2}\alpha\beta$ であり，

$|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA}|^2=|\overrightarrow{PA}|^2+|\overrightarrow{PB}|^2-2\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta$ と $|\overrightarrow{AB}|=1$ より

$\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta=1$　…①

ここで ∠APB＝∠APC＝120° より ∠BPC＝120° なので $\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=-\dfrac{1}{2}$ となり，

∠BAC＝90°，$|\overrightarrow{AB}|=1$，$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{3}$ より $|\overrightarrow{BC}|=2$ となるので，同様に $\beta^2+\gamma^2+\beta\gamma=4$ …②，$\gamma^2+\alpha^2+\gamma\alpha=3$　…③を得る．

①−②，②−③より

$(\alpha-\gamma)(\alpha+\beta+\gamma)=-3$，$(\beta-\alpha)(\alpha+\beta+\gamma)=1$ となるが，$\alpha+\beta+\gamma=t(>0)$ とおくと，$(\alpha-\gamma)t=-3$，$(\beta-\alpha)t=1$ より $\beta=\dfrac{1}{t}+\alpha$，$\gamma=\dfrac{3}{t}+\alpha$ となるので，これらと $\alpha+\beta+\gamma=t$ より $\alpha=\dfrac{1}{3}\left(t-\dfrac{4}{t}\right)$，$\beta=\dfrac{1}{3}\left(t-\dfrac{1}{t}\right)$．これらを①に代入して整理すると $(t^2-1)(t^2-7)=0$ となり，$\alpha>0$ を満たすものは $t=\sqrt{7}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

よって $\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{7}}$，$\beta=\dfrac{2}{\sqrt{7}}$，$\gamma=\dfrac{4}{\sqrt{7}}$ となり，これらが求める値である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

30 四面体OABCにおいて，4つの面はすべて合同であり，OA＝3，OB＝$\sqrt{7}$，AB＝2であるとする．
また3点O，A，Bを含む平面をLとする．
(1) 点Cから平面Lに下ろした垂線の足をHとおく．$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$を$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$と$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$を用いて表せ．
(2) $0<t<1$をみたす実数tに対して，線分OA，OB各々を$t:1-t$に内分する点をそれぞれP_t，Q_tとおく．2点P_t，Q_tを通り，平面Lに垂直な平面をMとするとき，平面Mによる四面体OABCの切り口の面積$S(t)$を求めよ．
(3) tが$0<t<1$の範囲を動くとき，$S(t)$の最大値を求めよ．

《10東大・理科》

【答】 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{5}{9}\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$　(2) $S(t)=\begin{cases}3\sqrt{6}\,t^2 & \left(0<t\leqq\dfrac{2}{9}\right)\\ -\dfrac{12\sqrt{6}}{49}(8t-1)(t-1) & \left(\dfrac{2}{9}<t<1\right)\end{cases}$

(3) $\dfrac{3}{8}\sqrt{6}$

【解説】 条件よりOC＝2，BC＝3，CA＝$\sqrt{7}$である．
このとき$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=3$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=\sqrt{7}$，$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=2$であり，

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2}{2}=\dfrac{3^2+(\sqrt{7})^2-2^2}{2}=6$，同様に$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=1$，
$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=3$を得る．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}$　(α，βは実数)とおくと

CH⊥OAより
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}&=(\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}\\&=\alpha|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+\beta\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}\\&=9\alpha+6\beta-3=0\end{aligned}$$

またCH⊥OBより同様に
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}&=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\beta|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}\\&=6\alpha+7\beta-1=0\end{aligned}$$

よって$\alpha=\dfrac{5}{9}$，$\beta=-\dfrac{1}{3}$となるので，$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{5}{9}\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}}$.

(2) (1)より
$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|^2&=|\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2\\&=\alpha^2|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+\beta^2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2+2\alpha\beta\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}-2\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}-2\alpha\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}\\&=\frac{8}{3}\end{aligned}$$

なので$|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$である．

$\overrightarrow{\mathrm{OP}_t}=t\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}_t}=t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$より，Hが直線$\mathrm{P}_t\mathrm{Q}_t$上になるのは

$$\frac{5}{9}\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(1-u)\cdot t\overrightarrow{\mathrm{OA}}+u\cdot t\overrightarrow{\mathrm{OB}}\quad(u\text{は実数})$$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

となるときなので，$\dfrac{5}{9}=(1-u)t$ かつ $-\dfrac{1}{3}=ut$ より $t=\dfrac{2}{9}$ となる．

(Ⅰ)　$0<t\leqq\dfrac{2}{9}$ のとき，平面 M と OC との交点を C_t とすると，$\triangle C_tP_tQ_t$ と $\triangle CP_{\frac{2}{9}}Q_{\frac{2}{9}}$ は相似で，相似比が $t:\dfrac{2}{9}=9t:2$ より $\triangle CP_{\frac{2}{9}}Q_{\frac{2}{9}}$ の面積が $\dfrac{1}{2}\times2\times\dfrac{2}{9}\times|\overrightarrow{CH}|=\dfrac{4\sqrt{6}}{27}$ となるので，$S(t)=\dfrac{4\sqrt{6}}{27}\times\left(\dfrac{9t}{2}\right)^2=3\sqrt{6}\,t^2$

(Ⅱ)　$\dfrac{2}{9}<t<1$ のとき，平面 M と AC，平面 M と BC との交点をそれぞれ A_t，B_t とおくと，$\triangle CA_tB_t$ と $\triangle CAB$ が相似であることより $A_tB_t=\dfrac{2(9t-2)}{7}$ であり，また $P_tQ_t=2t$ である．

A_tB_t と P_tQ_t の距離 d は $d=\dfrac{|\overrightarrow{CH}|}{1-\dfrac{2}{9}}(1-t)=\dfrac{6\sqrt{6}}{7}(1-t)$ なので

$S(t)=\dfrac{(A_tB_t+P_tQ_t)\times d}{2}=-\dfrac{12\sqrt{6}}{49}(8t-1)(t-1)$

以上より，$\boldsymbol{S(t)=\begin{cases}3\sqrt{6}\,t^2 & \left(0<t\leqq\dfrac{2}{9}\right)\\ -\dfrac{12\sqrt{6}}{49}(8t-1)(t-1) & \left(\dfrac{2}{9}<t<1\right)\end{cases}}$．

(3)　(2)の結果と $-\dfrac{12\sqrt{6}}{49}(8t-1)(t-1)=-\dfrac{96\sqrt{6}}{49}\left(t-\dfrac{9}{16}\right)^2+\dfrac{3}{8}\sqrt{6}$ であることより，求める最大値は $S\left(\dfrac{9}{16}\right)=\boldsymbol{\dfrac{3}{8}\sqrt{6}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第９講　複素数，２次曲線

31 実数 a，b に対し平面上の点 $P_n(x_n,\ y_n)$ を

$$(x_0,\ y_0)=(1,\ 0)$$
$$(x_{n+1},\ y_{n+1})=(ax_n-by_n,\ bx_n+ay_n)\quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

によって定める．このとき，次の条件(i)，(ii)がともに成り立つような $(a,\ b)$ をすべて求めよ．

(i)　$P_0=P_6$

(ii)　P_0，P_1，P_2，P_3，P_4，P_5 は相異なる．

《13 東大・理科》

【答】 $(a,\ b)=\left(\dfrac{1}{2},\ \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

【解説】 虚数単位を i として $\alpha_n=x_n+y_ni$，$\omega=a+bi$ とすると，$\alpha_{n+1}=\omega\alpha_n$ と表せる．

よって $\alpha_n=\alpha_0\omega^n$ なので $\alpha_0=1$ より $\alpha_n=\omega^n$　$(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ である．

条件(i)より $\omega^6=\omega^0=1$ となるが，$|\omega^6|=1 \iff |\omega|^6=1$ より $|\omega|=1$ なので $\omega=\cos\theta+i\sin\theta$　$(0\leqq\theta<2\pi)$ とおくことができる．

このとき $\omega^6=\cos6\theta+i\sin6\theta=1$ となるものは $\theta=\dfrac{k}{3}\pi$　$(k=0,\ 1,\ \cdots,\ 5)$　であるが，

$k=0,\ 2,\ 3,\ 4$ のとき，条件(ii)を満たさない．

$k=1,\ 5$ のとき，条件(ii)を満たすので，求める a と b の組は $\boldsymbol{(a,\ b)=\left(\dfrac{1}{2},\ \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)}$．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

32 $|z|>\dfrac{5}{4}$ となるどのような複素数 z に対しても $w=z^2-2z$ とは表されない複素数 w 全体の集合を T とする．

すなわち，$T=\left\{w \mid w=z^2-2z \text{ ならば } |z|\leqq\dfrac{5}{4}\right\}$ とする．このとき，T に属する複素数 w で絶対値 $|w|$ が最大となるような w を求めよ．

《05 東大・理科》

【答】 $w=-\dfrac{25}{16}$

【解説】 以下 i を虚数単位とする．

$z^2-2z=w \iff z^2-2z-w=0$ の 2 解を α，β とすると，解と係数の関係より $\alpha+\beta=2$ …①，$\alpha\beta=-w$ …②が成り立つ．

また，$|z|\leqq\dfrac{5}{4}$ より $|\alpha|\leqq\dfrac{5}{4}$ …③，$|\beta|\leqq\dfrac{5}{4}$ …④である．

このとき②より $|w|=|-\alpha\beta|=|\alpha||\beta|$ であるが，③と④より $|w|\leqq\dfrac{25}{16}$ となる．

ここで等号成立は $|\alpha|=\dfrac{5}{4}$ かつ $|\beta|=\dfrac{5}{4}$ であるが，①より $\beta=2-\alpha$ なので，

$$|\alpha|=\frac{5}{4} \text{ かつ } |2-\alpha|=\frac{5}{4} \iff \alpha\overline{\alpha}=\frac{25}{16} \text{ かつ } (2-\alpha)(2-\overline{\alpha})=\frac{25}{16}$$

$$\iff \alpha\overline{\alpha}=\frac{25}{16} \text{ かつ } \alpha+\overline{\alpha}=2$$

なので，α と $\overline{\alpha}$ は $x^2-2x+\dfrac{25}{16}=0$ の 2 解なので，$\alpha=1\pm\dfrac{3}{4}i$．

よって $\beta=2-\alpha=1\mp\dfrac{3}{4}i$ （複号同順）つまり $\beta=\overline{\alpha}$．

よって $\boldsymbol{w}=-\alpha\beta=-\alpha\overline{\alpha}=-|\alpha|^2\boldsymbol{=-\dfrac{25}{16}}$ のとき $|w|$ は最大となる．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

33 Oを原点とする座標平面上の曲線

$$C: y=\frac{1}{2}x+\sqrt{\frac{1}{4}x^2+2}$$

と，その上の相異なる2点 $P_1(x_1,\ y_1)$，$P_2(x_2,\ y_2)$ を考える．

(1) P_i $(i=1,\ 2)$ を通る x 軸に平行な直線と，直線 $y=x$ との交点を，それぞれ H_i $(i=1,\ 2)$ とする．このとき $\triangle OP_1H_1$ と $\triangle OP_2H_2$ の面積は等しいことを示せ．

(2) $x_1<x_2$ とする．このとき C の $x_1 \leqq x \leqq x_2$ の範囲にある部分と，線分 P_1O，P_2O とで囲まれる図形の面積を，y_1，y_2 を用いて表せ．

《10 東大・理科》

【答】 (1) 略　(2) $2\log\dfrac{y_2}{y_1}$

【解説】 (1) $x \geqq 0$ のとき $y>0$，

$x<0$ のとき $y=\dfrac{1}{2}x+\sqrt{\dfrac{1}{4}x^2+2}=-\sqrt{\dfrac{1}{4}x^2}+\sqrt{\dfrac{1}{4}x^2+2}$ より $y>0$ である．

ここで $y=\dfrac{1}{2}x+\sqrt{\dfrac{1}{4}x^2+2} \iff y-\dfrac{1}{2}x=\sqrt{\dfrac{1}{4}x^2+2}$

$$\iff y \geqq \frac{1}{2}x \text{ かつ } \left(y-\frac{1}{2}x\right)^2=\frac{1}{4}x^2+2$$

$$\iff y \geqq \frac{1}{2}x \text{ かつ } y(y-x)=2$$

であり，$y>0$ より C は $x=y-\dfrac{2}{y}$ かつ $x \leqq 2y$ と表せる．

このとき C 上の点Pは正の実数 t を用いて，$\left(t-\dfrac{2}{t},\ t\right)$ と表せる．この点を通り x 軸に平行な直線と $y=x$ との交点をHとすると $H(t,\ t)$ と表せるので，

$PH=t-\left(t-\dfrac{2}{t}\right)=\dfrac{2}{t}$．よって $\triangle OPH$ の面積は $\dfrac{1}{2}\times t\times PH=1$ となり，Pの座標に関らず，$\triangle OPH$ の面積は一定の値1をとる．

よって $\triangle OP_1H_1$ と $\triangle OP_2H_2$ の面積は等しいことが示された．

(2) (1)の結果より，求める面積は C 上の P_1，P_2 の間の弧と，線分 P_1H_1，H_1H_2，H_2P_2 で囲まれる部分の面積なので

$$\int_{y_1}^{y_2}\left\{y-\left(y-\frac{2}{y}\right)\right\}dy=\int_{y_1}^{y_2}\frac{2}{y}dy=\Big[2\log|y|\Big]_{y_1}^{y_2}=\boldsymbol{2\log\frac{y_2}{y_1}}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 10 講　数学Ⅲの微分

34 次の連立不等式で定まる座標平面上の領域 D を考える．

$$x^2+(y-1)^2 \leqq 1,\quad x \geqq \frac{\sqrt{2}}{3}$$

直線 l は原点を通り，D との共通部分が線分となるものとする．その線分の長さ L の最大値を求めよ．また，L が最大値をとるとき，x 軸と l のなす角 θ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ の余弦 $\cos\theta$ を求めよ．

《12 東大・理科》

【答】 最大値 $\frac{\sqrt{6}}{3}$，$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$

【解説】 直線 l は $y=(\tan\theta)x$ と表せる．

ここで $x^2+(y-1)^2=1$ と $x=\frac{\sqrt{2}}{3}$ の交点は $\left(\frac{\sqrt{2}}{3},\ \frac{3\pm\sqrt{7}}{3}\right)$ なので

$\frac{3-\sqrt{7}}{\sqrt{2}}<\tan\theta<\frac{3+\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$ を満たす．ここで $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ と $\tan\theta=\frac{3-\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$ を満たす θ を θ_1，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ と $\tan\theta=\frac{3+\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$ を満たす θ を θ_2 とおく．

また，$x=\frac{\sqrt{2}}{3}$ と直線 l の交点を P，$x^2+(y-1)^2=1$ と l の原点以外の交点を Q，$(0,\ 1)$ を C とし，原点を O とすると，$\cos\theta=\frac{\frac{\sqrt{2}}{3}}{\mathrm{OP}}$ より $\mathrm{OP}=\frac{\sqrt{2}}{3\cos\theta}$ であり，

$\angle\mathrm{COQ}=\frac{\pi}{2}-\theta$，$\mathrm{CO}=\mathrm{CQ}$ より $\angle\mathrm{OCQ}=2\theta$ なので $\mathrm{OQ}=2\sin\theta$ となるので

$L=\mathrm{OQ}-\mathrm{OP}=2\sin\theta-\frac{\sqrt{2}}{3\cos\theta}$ となる．

$$\frac{d}{d\theta}L=2\cos\theta-\frac{\sqrt{2}\sin\theta}{3\cos^2\theta}=\frac{\sqrt{2}\,(3\sqrt{2}\cos^3\theta-\sin\theta)}{3\cos^2\theta}$$
$$=\frac{\sqrt{2}\,(6\cos^4\theta+2\cos^2\theta+1)(\sqrt{3}\cos\theta+1)(\sqrt{3}\cos\theta-1)}{3\cos^2\theta(3\sqrt{2}\cos^3\theta+\sin\theta)}$$

より，α を $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$ かつ $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ をみたすものとすると，$\tan\alpha=\sqrt{2}$ より $\theta_1<\alpha<\theta_2$

となるので，L の増減は

θ	θ_1	$\cdots$	α	$\cdots$	θ_2
L'		$+$	0	$-$	
L		↗		↘	

となるので，$\theta=\alpha$ で L は最大値をとり，その値は $2\sin\alpha-\frac{\sqrt{2}}{3\cos\alpha}=\frac{\sqrt{6}}{3}$ である．

以上より，**最大値 $\frac{\sqrt{6}}{3}$，$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$**．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

35　a を正の実数とし，p を正の有理数とする．座標平面上の 2 つの曲線 $y=ax^p\ \ (x>0)$ と $y=\log x\ \ (x>0)$ を考える．この 2 つの曲線の共有点が 1 点のみであるとし，その共有点を Q とする．

以下の問いに答えよ．必要であれば，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^p}{\log x}=\infty$ を証明なしに用いてよい．

(1)　a および点 Q の x 座標を p を用いて表せ．

(2)　この 2 つの曲線と x 軸で囲まれる図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を p を用いて表せ．

(3)　(2)で得られる立体の体積が 2π になるときの p の値を求めよ．

《15 東大・理科》

【答】　(1)　$a=\dfrac{1}{ep}$，Q の x 座標は $e^{\frac{1}{p}}$　　(2)　$2\pi\left(\dfrac{1-2p}{1+2p}e^{\frac{1}{p}}+1\right)$　　(3)　$p=\dfrac{1}{2}$

【解説】　(1)　$ax^p=\log x \iff a=x^{-p}\log x$ より，$y=a$ と $y=x^{-p}\log x$ のグラフの共有点が 1 点のみであればよい．$f(x)=x^{-p}\log x$ とおくと，

$f'(x)=\dfrac{1-p\log x}{x^{p+1}}$ より $f(x)$ の増減は

x	0	$\cdots$	$e^{\frac{1}{p}}$	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\dfrac{1}{ep}$	↘	0

となる．

よって $\boldsymbol{a=\dfrac{1}{ep}}$，Q の x 座標は $\boldsymbol{e^{\frac{1}{p}}}$．

(2)　求める体積は

$$\int_0^{e^{\frac{1}{p}}}\pi(ax^p)^2dx-\int_1^{e^{\frac{1}{p}}}\pi(\log x)^2\,dx=\pi\left[\frac{a^2}{2p+1}x^{2p+1}\right]_0^{e^{\frac{1}{p}}}-\pi\Big[x\{(\log x)^2-2\log x+2\}\Big]_1^{e^{\frac{1}{p}}}$$

$$=\boldsymbol{2\pi\left(\frac{1-2p}{1+2p}e^{\frac{1}{p}}+1\right)}$$

(3)　$2\pi\left(\dfrac{1-2p}{1+2p}e^{\frac{1}{p}}+1\right)=2\pi$ より $\dfrac{1-2p}{1+2p}e^{\frac{1}{p}}=0$．ゆえに $\boldsymbol{p=\dfrac{1}{2}}$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

36 a を実数とし，$x>0$ で定義された関数 $f(x)$，$g(x)$ を次のように定める．

$$f(x)=\frac{\cos x}{x},\qquad g(x)=\sin x+ax$$

このとき $y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフが $x>0$ において共有点をちょうど3つ持つような a をすべて求めよ．

《13 東大・理科》

【答】 $a=-\dfrac{2}{5\pi}$，$\dfrac{2}{7\pi}<a<\dfrac{2}{3\pi}$

【解説】 $f(x)=g(x) \iff \dfrac{\cos x}{x}=\sin x+ax \iff a=\dfrac{\cos x-x\sin x}{x^2}$ より

$h(x)=\dfrac{\cos x-x\sin x}{x^2}$ とおくと $h'(x)=-\dfrac{x^2+2}{x^3}\cos x$ より，n を 0 以上の整数として

x	$2n\pi$	$\cdots$	$2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$	$\cdots$	$2n\pi+\dfrac{3}{2}\pi$	$\cdots$	$2(n+1)\pi$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$h(x)$		↘		↗		↘	

ここで $\displaystyle\lim_{x\to+0}h(x)=\infty$，$h\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{2}{\pi}$，$h\left(\dfrac{3}{2}\pi\right)=\dfrac{2}{3\pi}$，$h\left(\dfrac{5}{2}\pi\right)=-\dfrac{2}{5\pi}$，$h\left(\dfrac{7}{2}\pi\right)=\dfrac{2}{7\pi}$ である．

また，$x\geqq 4\pi$ のとき $\left|\dfrac{\cos x}{x^2}\right|\leqq\dfrac{1}{16\pi^2}$，$\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|\leqq\dfrac{1}{4\pi}$ なので

$|h(x)|\leqq\dfrac{1}{16\pi^2}+\dfrac{1}{4\pi}=\dfrac{1+4\pi}{16\pi^2}<\dfrac{2}{7\pi}$ となる．

よって求める a は $\boldsymbol{a=-\dfrac{2}{5\pi}}$，$\boldsymbol{\dfrac{2}{7\pi}<a<\dfrac{2}{3\pi}}$．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第11講　数学Ⅲの積分

37　L を正定数とする．座標平面の x 軸上の正の部分にある点 $\mathrm{P}(t,\ 0)$ に対し，原点Oを中心とし点Pを通る円周上を，Pから出発して反時計回りに道のり L だけ進んだ点を $\mathrm{Q}(u(t),\ v(t))$ と表す．

(1)　$u(t)$，$v(t)$ を求めよ．

(2)　$0<a<1$ の範囲の実数 a に対し，積分

$$f(a)=\int_a^1\sqrt{\{u'(t)\}^2+\{v'(t)\}^2}\,dt$$

を求めよ．

(3)　極限 $\displaystyle\lim_{a\to+0}\frac{f(a)}{\log a}$ を求めよ．

《11東大・理科》

【答】 (1)　$u(t)=t\cos\dfrac{L}{t}$，$v(t)=t\sin\dfrac{L}{t}$

(2)　$f(a)=\sqrt{L^2+1}-\sqrt{L^2+a^2}+L\log\dfrac{\sqrt{L^2+a^2}+L}{a(\sqrt{L^2+1}+L)}$　　(3)　$-L$

【解説】 (1)　$\angle\mathrm{QOP}=\dfrac{L}{t}$ なので $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=t\left(\cos\dfrac{L}{t},\ \sin\dfrac{L}{t}\right)$．

よって $\boldsymbol{u(t)=t\cos\dfrac{L}{t}}$，$\boldsymbol{v(t)=t\sin\dfrac{L}{t}}$．

(2)　$u'(t)=\cos\dfrac{L}{t}+t\times\left(\dfrac{L}{t^2}\sin\dfrac{L}{t}\right)$，$v'(t)=\sin\dfrac{L}{t}-t\times\left(\dfrac{L}{t^2}\cos\dfrac{L}{t}\right)$ より

$$\sqrt{\{u'(t)\}^2+\{v'(t)\}^2}=\sqrt{1+\frac{L^2}{t^2}}$$

ここで $\tan\theta=\dfrac{L}{t}\iff t=\dfrac{L}{\tan\theta}$ と置換積分するため，実数 α と β をそれぞれ $\tan\alpha=\dfrac{L}{a}$，$\tan\beta=L$ を満たす0より大きく $\dfrac{\pi}{2}$ 未満の実数とすると，

$$\begin{aligned}
f(a)&=\int_\alpha^\beta\frac{1}{|\cos\theta|}\cdot\frac{L}{-\sin^2\theta}d\theta\\
&=\int_\beta^\alpha\frac{L}{\sin^2\theta\cos\theta}d\theta\\
&=L\int_\beta^\alpha\left\{\frac{1}{\sin^2\theta}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\sin\theta}+\frac{1}{1+\sin\theta}\right)\right\}\cos\theta\cdot d\theta\\
&=L\left[-\frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{2}\log\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\right]_\beta^\alpha\\
&=L\left[-\frac{1}{\sin\theta}+\log\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\right]_\beta^\alpha\\
&=L\left\{\left(-\frac{1}{\sin\alpha}+\log\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)-\left(-\frac{1}{\sin\beta}+\log\frac{1+\sin\beta}{\cos\beta}\right)\right\}
\end{aligned}$$

ここで $\tan\alpha=\dfrac{L}{a}$，$\tan\beta=L$ より $\sin\alpha=\dfrac{L}{\sqrt{L^2+a^2}}$，$\cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{L^2+a^2}}$，

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$\sin\beta=\dfrac{L}{\sqrt{L^2+1}}$，$\cos\beta=\dfrac{1}{\sqrt{L^2+1}}$ なので

$$f(a)=L\left\{-\frac{\sqrt{L^2+a^2}}{L}+\log\frac{\sqrt{L^2+a^2}+L}{a}+\frac{\sqrt{L^2+1}}{L}-\log\left(\sqrt{L^2+1}+L\right)\right\}$$

$$=\boldsymbol{\sqrt{L^2+1}-\sqrt{L^2+a^2}+L\log\frac{\sqrt{L^2+a^2}+L}{a(\sqrt{L^2+1}+L)}}$$

(3)　(2)の結果より $\dfrac{f(a)}{\log a}=\dfrac{\sqrt{L^2+1}-\sqrt{L^2+a^2}+L\log\dfrac{\sqrt{L^2+a^2}+L}{\sqrt{L^2+1}+L}}{\log a}-L$ であり，

$a\to+0$ のとき

$$\sqrt{L^2+1}-\sqrt{L^2+a^2}+L\log\frac{\sqrt{L^2+a^2}+L}{\sqrt{L^2+1}+L}\to\sqrt{L^2+1}-L+L\log\frac{2L}{\sqrt{L^2+1}+L},$$

$\log a\to-\infty$ なので $\displaystyle\lim_{a\to+0}\frac{f(a)}{\log a}=\boldsymbol{-L}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

38 u を実数とする．座標平面上の 2 つの放物線 C_1：$y=-x^2+1$，
C_2：$y=(x-u)^2+u$ を考える．
C_1とC_2が共有点をもつような u の値の範囲は，ある実数 a，b により，$a\leqq u\leqq b$と表される．

(1) a，b の値を求めよ．

(2) u が $a\leqq u\leqq b$ をみたすとき，C_1とC_2 の共有点を $\mathrm{P_1}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{P_2}(x_2,\ y_2)$ とする．ただし，共有点が 1 点のみのときは，$\mathrm{P_1}$ と $\mathrm{P_2}$ は一致し，ともにその共有点を表すとする．$2|x_1y_2-x_2y_1|$ を u の式で表せ．

(3) (2)で得られる u の式を $f(u)$ とする．定積分 $I=\int_a^b f(u)du$ を求めよ．

《14 東大・理科》

【答】 (1) $a=-1-\sqrt{3}$，$b=-1+\sqrt{3}$　(2) $(u^2+u+1)\sqrt{-u^2-2u+2}$　(3) $\dfrac{21}{8}\pi$

【解説】 (1) $(x-u)^2+u=-x^2+1 \iff 2x^2-2ux+u^2+u-1=0$ が実数解をもつので
$(-u)^2-2(u^2+u-1)\geqq 0 \iff -u^2-2u+2\geqq 0 \quad \therefore\ -1-\sqrt{3}\leqq u\leqq -1+\sqrt{3}$
よって $\boldsymbol{a=-1-\sqrt{3}}$，$\boldsymbol{b=-1+\sqrt{3}}$．

(2) $\mathrm{P_1}$ と $\mathrm{P_2}$ は直線 $y=-ux+\dfrac{u^2+u+1}{2}$ 上より $y_j=-ux_j+\dfrac{u^2+u+1}{2}$ $(j=1,\ 2)$ と表せるので

$$\begin{aligned}\boldsymbol{2|x_1y_2-x_2y_1|}&=2\left|x_1\left(-ux_2+\frac{u^2+u+1}{2}\right)-x_2\left(-ux_1+\frac{u^2+u+1}{2}\right)\right|\\&=|(u^2+u+1)(x_1-x_2)|\\&=(u^2+u+1)\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}\\&=\boldsymbol{(u^2+u+1)\sqrt{-u^2-2u+2}}\end{aligned}$$

(3) $\displaystyle\int_a^b(u+1)\sqrt{-u^2-2u+2}\,du=\left[-\frac{1}{3}(-u^2-2u+2)^{\frac{3}{2}}\right]_a^b=0$ より

$$\begin{aligned}I&=\int_a^b u^2\sqrt{-u^2-2u+2}\,du\\&=\int_a^b\{(u+1)-1\}^2\sqrt{3-(u+1)^2}\,du\end{aligned}$$

となるが，$u+1=\sqrt{3}\sin\theta$ と置換積分すると

$$\begin{aligned}I&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sqrt{3}\sin\theta-1)^2\sqrt{3}\,|\cos\theta|\cdot\sqrt{3}\cos\theta d\theta\\&=6\int_0^{\frac{\pi}{2}}(3\sin^2\theta\cos^2\theta+\cos^2\theta)d\theta\\&=\frac{3}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(7-3\cos4\theta+4\cos2\theta)d\theta\\&=\frac{3}{4}\left[7\theta-\frac{3}{4}\sin4\theta+2\sin2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\boldsymbol{\frac{21}{8}\pi}\end{aligned}$$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

39

(1) すべての自然数 k に対して，次の不等式を示せ．

$$\frac{1}{2(k+1)}<\int_0^1\frac{1-x}{k+x}dx<\frac{1}{2k}$$

(2) $m>n$ であるようなすべての自然数 m と n に対して，次の不等式を示せ．

$$\frac{m-n}{2(m+1)(n+1)}<\log\frac{m}{n}-\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k}<\frac{m-n}{2mn}$$

《10 東大・理科》

【答】 (1) 略　　(2) 略

【解説】 (1) $f(x)=\dfrac{1-x}{k+x}$ とおくと，$f(x)=-1+\dfrac{k+1}{k+x}$ より $f'(x)=-\dfrac{k+1}{(k+x)^2}$，

$f''(x)=\dfrac{2(k+1)}{(k+x)^3}$ となる．

$0<x<1$ のとき $f''(x)>0$ つまり $y=f(x)$ はこの区間で下に凸であり，$f(0)=\dfrac{1}{k}$，

$f(1)=0$ なので，$0<x<1$ のとき $f(x)<-\dfrac{1}{k}(x-1)$ を満たす．

また，$f'(1)=-\dfrac{k+1}{(k+1)^2}=-\dfrac{1}{k+1}$ より $x=1$ における $y=f(x)$ の接線は

$y=-\dfrac{1}{k+1}(x-1)$．これと $0<x<1$ のとき$y=f(x)$ は下に凸なので，$0<x<1$ のとき

$f(x)>-\dfrac{1}{k+1}(x-1)$ を満たす．

以上より，$0<x<1$ において $-\dfrac{1}{k+1}(x-1)<f(x)<-\dfrac{1}{k}(x-1)$ となるので

$$\int_0^1\left\{-\frac{1}{k+1}(x-1)\right\}dx<\int_0^1 f(x)dx<\int_0^1\left\{-\frac{1}{k}(x-1)\right\}dx$$

を得る．

$\displaystyle\int_0^1\left\{-\frac{1}{k+1}(x-1)\right\}dx=\left[-\frac{1}{2(k+1)}(x-1)^2\right]_0^1=\frac{1}{2(k+1)}$，同様に

$\displaystyle\int_0^1\left\{-\frac{1}{k}(x-1)\right\}dx=\frac{1}{2k}$ より $\displaystyle\frac{1}{2(k+1)}<\int_0^1\frac{1-x}{k+x}dx<\frac{1}{2k}$ が示された．

(2) $\displaystyle\int_0^1\frac{1-x}{k+x}dx=\int_0^1\left(-1+\frac{k+1}{k+x}\right)dx=\Big[-x+(k+1)\log|k+x|\Big]_0^1$

$=(k+1)\{\log(k+1)-\log k\}-1$ なので，(1)は

$$\frac{1}{2(k+1)}<(k+1)\{\log(k+1)-\log k\}-1<\frac{1}{2k}$$

$\displaystyle\iff\quad\frac{1}{2(k+1)^2}<\log(k+1)-\log k-\frac{1}{k+1}<\frac{1}{2k(k+1)}$ となる．よって

$$\sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{2(k+1)^2}<\sum_{k=n}^{m-1}\left\{\log(k+1)-\log k-\frac{1}{k+1}\right\}<\sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{2k(k+1)}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

が成り立つ.

ここで，$x>0$ で単調減少な関数 $g(x)=\dfrac{1}{2x^2}$ において $k+1<x$ のとき $g(k+1)>g(x)$

つまり $\dfrac{1}{2(k+1)^2}>\dfrac{1}{2x^2}$ だから $\dfrac{1}{2(k+1)^2}>\displaystyle\int_{k+1}^{k+2}\dfrac{1}{2x^2}dx$

よって

$$\sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{2(k+1)^2}>\sum_{k=n}^{m-1}\int_{k+1}^{k+2}\frac{1}{2x^2}dx=\int_{n+1}^{m+1}\frac{1}{2x^2}dx=\left[-\frac{1}{2x}\right]_{n+1}^{m+1}=\frac{m-n}{2(m+1)(n+1)}$$

であり，

$$\sum_{k=n}^{m-1}\left\{\log(k+1)-\log k-\frac{1}{k+1}\right\}=\log m-\log n-\sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{k+1}=\log\frac{m}{n}-\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k},$$

$\displaystyle\sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{2k(k+1)}=\frac{1}{2}\sum_{k=n}^{m-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)=\frac{m-n}{2mn}$ となるので，与えられた不等式は示された.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

40　n を正の整数とする．以下の問いに答えよ．

(1)　関数 $g(x)$ を次のように定める．

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos(\pi x)+1}{2} & (|x|\leqq 1 \text{ のとき})\\ 0 & (|x|>1 \text{ のとき})\end{cases}$$

$f(x)$ を連続な関数とし，p，q を実数とする．$|x|\leqq\dfrac{1}{n}$ をみたす x に対して $p\leqq f(x)\leqq q$ が成り立つとき，次の不等式を示せ．

$$p\leqq n\int_{-1}^{1}g(nx)f(x)dx\leqq q$$

(2)　関数 $h(x)$ を次のように定める．

$$h(x)=\begin{cases}-\dfrac{\pi}{2}\sin(\pi x) & (|x|\leqq 1 \text{ のとき})\\ 0 & (|x|>1 \text{ のとき})\end{cases}$$

このとき，次の極限を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty}n^2\int_{-1}^{1}h(nx)\log(1+e^{x+1})dx$$

《15 東大・理科》

【答】 (1)　略　　(2)　$-\dfrac{e}{e+1}$

【解説】 (1)　$I=n\displaystyle\int_{-1}^{1}g(nx)f(x)dx$ とおく．$nx=t$ と置換積分することで，

$I=\displaystyle\int_{-n}^{n}g(t)f\left(\frac{t}{n}\right)dt$ となるが，$|t|>1$ では $g(t)=0$ なので $I=\displaystyle\int_{-1}^{1}g(t)f\left(\frac{t}{n}\right)dt$．ここで，

$-1\leqq t\leqq 1$ のとき $-\dfrac{1}{n}\leqq\dfrac{t}{n}\leqq\dfrac{1}{n}$ であり $p\leqq f\left(\dfrac{t}{n}\right)\leqq q$ となるので

$p\displaystyle\int_{-1}^{1}g(t)dt\leqq I\leqq q\int_{-1}^{1}g(t)dt$ となる．

ここで $\displaystyle\int_{-1}^{1}g(t)dt=\int_{-1}^{1}\frac{\cos(\pi t)+1}{2}dt=\left[\frac{\frac{1}{\pi}\sin(\pi t)+t}{2}\right]_{-1}^{1}=1$ となるので $p\leqq I\leqq q$

が示された．

(2)　$\log(1+e^{x+1})=f(x)$ とおくと，$g'(x)=h(x)$，$g(\pm n)=0$ より

$$n^2\int_{-1}^{1}h(nx)f(x)dx=n^2\left\{\left[\frac{g(nx)}{n}f(x)\right]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}\frac{g(nx)}{n}f'(x)dx\right\}$$
$$=-n\int_{-1}^{1}g(nx)f'(x)dx$$

ここで $f'(x)=\dfrac{e^{x+1}}{1+e^{x+1}}=1-\dfrac{1}{1+e^{x+1}}$ において $1+e^{x+1}$ は増加関数より $\dfrac{1}{1+e^{x+1}}$ は

減少関数つまり $f'(x)$ は増加関数となるので，$-\dfrac{1}{n}\leqq x\leqq\dfrac{1}{n}$ のとき

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$f'\left(-\dfrac{1}{n}\right) \leqq f'(x) \leqq f'\left(\dfrac{1}{n}\right)$ となる.

よって(1)の結果より $f'\left(-\dfrac{1}{n}\right) \leqq n\displaystyle\int_{-1}^{1} g(nx)f'(x)dx \leqq f'\left(\dfrac{1}{n}\right)$ が成り立つ.

$n\to\infty$ のとき $f'\left(-\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{e^{-\frac{1}{n}+1}}{1+e^{-\frac{1}{n}+1}} \to \dfrac{e}{1+e}$, $f'\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{e^{\frac{1}{n}+1}}{1+e^{\frac{1}{n}+1}} \to \dfrac{e}{1+e}$ なので

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\int_{-1}^{1} g(nx)f'(x)dx = \dfrac{e}{1+e}$ つまり $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2\int_{-1}^{1} h(nx)\log(1+e^{x+1})dx = \boldsymbol{-\dfrac{e}{e+1}}$.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第12講　求積問題

41 座標平面上で2つの不等式

$$y \geqq \frac{1}{2}x^2, \quad \frac{x^2}{4}+4y^2 \leqq \frac{1}{8}$$

によって定まる領域を S とする．S を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を V_1 とし，y 軸のまわりに回転してできる立体の体積を V_2 とする．

(1) V_1 と V_2 の値を求めよ．

(2) $\dfrac{V_2}{V_1}$ の値と1の大小を判定せよ．

《12東大・理科》

【答】 (1) $V_1=\dfrac{11}{480}\pi$，$V_2=\dfrac{8\sqrt{2}-7}{192}\pi$　　(2) $\dfrac{V_2}{V_1}<1$

【解説】 (1) $y=\dfrac{1}{2}x^2$ を $\dfrac{x^2}{4}+4y^2=\dfrac{1}{8}$ に代入して

$\dfrac{x^2}{4}+4\left(\dfrac{1}{2}x^2\right)^2=\dfrac{1}{8} \iff \left(x^2+\dfrac{1}{2}\right)\left(x^2-\dfrac{1}{4}\right)=0$ より $x=\pm\dfrac{1}{2}$．このとき $y=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{8}$．

また $\dfrac{x^2}{4}+4y^2=\dfrac{1}{8}$ に $x=0$ を代入して $y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{8}$．

ここで $y=\dfrac{1}{2}x^2$ より $y^2=\dfrac{x^4}{4}$，$x^2=2y$ であり，$\dfrac{x^2}{4}+4y^2=\dfrac{1}{8}$ より $y^2=\dfrac{1}{32}-\dfrac{x^2}{16}$，

$x^2=\dfrac{1}{2}-16y^2$ なので，

$$V_1=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\pi\left(\frac{1}{32}-\frac{x^2}{16}\right)dx-\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\pi\left(\frac{x^4}{4}\right)dx$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{32}-\frac{x^2}{16}-\frac{x^4}{4}\right)dx=2\pi\left[\frac{x}{32}-\frac{x^3}{48}-\frac{x^5}{20}\right]_0^{\frac{1}{2}}=\boldsymbol{\frac{11}{480}\pi}$$

$$V_2=\int_0^{\frac{1}{8}}\pi(2y)\,dy+\int_{\frac{1}{8}}^{\frac{\sqrt{2}}{8}}\pi\left(\frac{1}{2}-16y^2\right)dy=\pi\left\{\Big[y^2\Big]_0^{\frac{1}{8}}+\left[\frac{y}{2}-\frac{16}{3}y^3\right]_{\frac{1}{8}}^{\frac{\sqrt{2}}{8}}\right\}=\boldsymbol{\frac{8\sqrt{2}-7}{192}\pi}$$

(2) (1)の結果より $\dfrac{V_2}{V_1}-1=\dfrac{1}{22}(40\sqrt{2}-57)=\dfrac{1}{22}(\sqrt{3200}-\sqrt{3249})<0$ より $\boldsymbol{\dfrac{V_2}{V_1}<1}$．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

42

(1) x, y を実数とし，$x>0$ とする．t を変数とする2次関数 $f(t)=xt^2+yt$ の $0\leqq t\leqq 1$ における最大値と最小値の差を求めよ．

(2) 次の条件を満たす点 $(x,\ y)$ 全体からなる座標平面内の領域を S とする．

$x>0$ かつ，実数 z で $0\leqq t\leqq 1$ の範囲の全ての実数 t に対して

$$0\leqq xt^2+yt+z\leqq 1$$

を満たすようなものが存在する．

S の概形を図示せよ．

(3) 次の条件を満たす点 $(x,\ y,\ z)$ 全体からなる座標空間内の領域を V とする．

$0\leqq x\leqq 1$ かつ，$0\leqq t\leqq 1$ の範囲の全ての実数 t に対して，

$$0\leqq xt^2+yt+z\leqq 1$$

が成り立つ．

V の体積を求めよ．

《11東大・理科》

【答】 (1) $\begin{cases} x+y & (y\geqq 0\ \text{のとき}) \\ x+y+\dfrac{y^2}{4x} & (-x\leqq y<0\ \text{のとき}) \\ \dfrac{y^2}{4x} & (-2x\leqq y<-x\ \text{のとき}) \\ -x-y & (y<-2x\ \text{のとき}) \end{cases}$ (2) 略 (3) $\dfrac{17}{18}$

【解説】 (1) $f(t)=x\left(t+\dfrac{y}{2x}\right)^2-\dfrac{y^2}{4x}$ より，最大値と最小値の差は

$$\begin{cases} -\dfrac{y}{2x}\leqq 0\ \text{のとき} & f(1)-f(0)=x+y \\ 0<-\dfrac{y}{2x}\leqq\dfrac{1}{2}\ \text{のとき} & f(1)-f\left(-\dfrac{y}{2x}\right)=x+y+\dfrac{y^2}{4x} \\ \dfrac{1}{2}<-\dfrac{y}{2x}\leqq 1\ \text{のとき} & f(0)-f\left(-\dfrac{y}{2x}\right)=\dfrac{y^2}{4x} \\ 1<-\dfrac{y}{2x}\ \text{のとき} & f(0)-f(1)=-x-y \end{cases}$$

よって $\begin{cases} \boldsymbol{x+y} & \boldsymbol{(y\geqq 0\ \text{のとき})} \\ \boldsymbol{x+y+\dfrac{y^2}{4x}} & \boldsymbol{(-x\leqq y<0\ \text{のとき})} \\ \boldsymbol{\dfrac{y^2}{4x}} & \boldsymbol{(-2x\leqq y<-x\ \text{のとき})} \\ \boldsymbol{-x-y} & \boldsymbol{(y<-2x\ \text{のとき})} \end{cases}$

©RECRUIT HOLDINGS

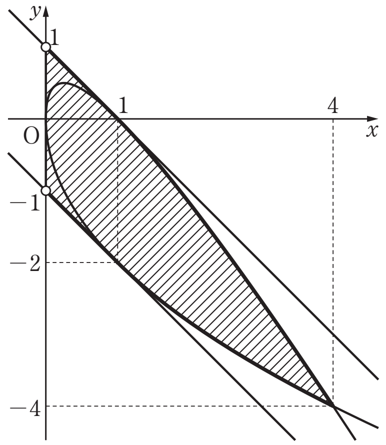
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(2)　(1)で求めた最大値と最小値の差が 1 以下であればよいので

$$\begin{cases} x+y\leqq 1 & (y\geqq 0\text{ のとき}) \\ x+y+\dfrac{y^2}{4x}\leqq 1 & (-x\leqq y<0\text{ のとき}) \\ \dfrac{y^2}{4x}\leqq 1 & (-2x\leqq y<-x\text{ のとき}) \\ -x-y\leqq 1 & (y<-2x\text{ のとき}) \end{cases}$$

よって $\begin{cases} y\leqq -x+1 & (y\geqq 0\text{ のとき}) \\ -2x-2\sqrt{x}\leqq y\leqq -2x+2\sqrt{x} & (-x\leqq y<0\text{ のとき}) \\ x\geqq \dfrac{1}{4}y^2 & (-2x\leqq y<-x\text{ のとき}) \\ y\geqq -x-1 & (y<-2x\text{ のとき}) \end{cases}$

つまり $\begin{cases} -x-1\leqq y\leqq -x+1 & (0<x\leqq 1) \\ -2\sqrt{x}\leqq y\leqq -2x+2\sqrt{x} & (1<x\leqq 4) \end{cases}$ となるので，$x=0$ を含まないで他の境界を含む図の斜線部分.



(3)　$f(t)$ の $0\leqq t\leqq 1$ における最大値を M，最小値を m とすると $m+z\geqq 0$ かつ $M+z\leqq 1$

つまり $-m\leqq z\leqq 1-M$ となるので，V は $\begin{cases} 0\leqq z\leqq 1-(x+y) & (y\geqq 0\text{ のとき}) \\ \dfrac{y^2}{4x}\leqq z\leqq 1-(x+y) & (-x\leqq y<0\text{ のとき}) \\ \dfrac{y^2}{4x}\leqq z\leqq 1 & (-2x\leqq y<-x\text{ のとき}) \\ -(x+y)\leqq z\leqq 1 & (y<-2x\text{ のとき}) \end{cases}$

を満たす $(x,\ y,\ z)$ の集合となる.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

Vを平面$x=k$　$(0<k\leqq 1)$で切った切り口は

$$\begin{cases} 0\leqq z\leqq 1-(k+y) & (y\geqq 0\text{ のとき}) \\ \dfrac{y^2}{4k}\leqq z\leqq 1-(k+y) & (-k\leqq y<0\text{ のとき}) \\ \dfrac{y^2}{4k}\leqq z\leqq 1 & (-2k\leqq y<-k\text{ のとき}) \\ -(k+y)\leqq z\leqq 1 & (y<-2k\text{ のとき}) \end{cases}$$

つまり$\begin{cases} -2\sqrt{kz}\leqq y\leqq -z+1-k & (0\leqq z\leqq k\text{ のとき}) \\ -z-k\leqq y\leqq -z+1-k & (k\leqq z\leqq 1\text{ のとき}) \end{cases}$となるので，切り口の面積は

$$\int_0^k\{(-z+1-k)-(-2\sqrt{kz})\}dz+\int_k^1\{(-z+1-k)-(-z-k)\}dz$$
$$=\left[-\frac{1}{2}z^2+(1-k)z+\frac{4\sqrt{k}}{3}z\sqrt{z}\right]_0^k+(1-k)$$
$$=1-\frac{1}{6}k^2$$

となる．よって求める体積は$\displaystyle\int_0^1\left(1-\frac{1}{6}k^2\right)dk=\left[k-\frac{1}{18}k^3\right]_0^1=\mathbf{\frac{17}{18}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

43 座標空間において，xy 平面内で不等式 $|x|\leqq 1$，$|y|\leqq 1$ により定まる正方形 S の4つの頂点を $\mathrm{A}(-1,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{C}(1,\ -1,\ 0)$，$\mathrm{D}(-1,\ -1,\ 0)$ とする．正方形 S を，直線BDを軸として回転させてできる立体を V_1，直線ACを軸として回転させてできる立体を V_2 とする．

(1) $0\leqq t<1$ を満たす実数 t に対し，平面 $x=t$ による V_1 の切り口の面積を求めよ．

(2) V_1 と V_2 の共通部分の体積を求めよ．

《13東大・理科》

【答】 (1) $\dfrac{8\sqrt{2}}{3}\sqrt{1-t^2}$　　(2) $\dfrac{32}{9}\sqrt{2}$

【解説】 (1) V_1 の表面の $x+y\geqq 0$ の部分の点を $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BO}}=|\overrightarrow{\mathrm{BP}}||\overrightarrow{\mathrm{BO}}|\cos\frac{\pi}{4}\ \text{かつ}\ x+y\geqq 0$$

ここで $\overrightarrow{\mathrm{BP}}=(x-1,\ y-1,\ z)$，$\overrightarrow{\mathrm{BO}}=(-1,\ -1,\ 0)$ より

$$2-(x+y)=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+z^2}\times\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}\ \text{かつ}\ x+y\geqq 0$$

$$\iff\ 0\leqq x+y\leqq 2\ \text{かつ}\ (2-x-y)^2=(x-1)^2+(y-1)^2+z^2$$

$$\iff\ 0\leqq x+y\leqq 2\ \text{かつ}\ z^2+2x+2y-2xy-2=0$$

となる．$x+y<0$ の部分は，対称性より $-2\leqq x+y<0$ かつ $z^2-2x-2y-2xy-2=0$ となる．

これら2式に平面 $x=t$ を代入すると

$$\begin{cases} 0\leqq t+y\leqq 2\ \text{かつ}\ z^2+2t+2y-2ty-2=0 \\ \qquad\text{または} \\ -2\leqq t+y<0\ \text{かつ}\ z^2-2t-2y-2ty-2=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -t\leqq y\leqq -t+2\ \text{かつ}\ y=-\dfrac{z^2}{2(1-t)}+1 \\ \qquad\text{または} \\ -t-2\leqq y<-t\ \text{かつ}\ y=\dfrac{z^2}{2(1+t)}-1 \end{cases}\quad\cdots①$$

となるが，$-\dfrac{z^2}{2(1-t)}+1=\dfrac{z^2}{2(1+t)}-1 \iff z=\pm\sqrt{2(1-t^2)}$ より，求める面積は

$$\int_{-\sqrt{2(1-t^2)}}^{\sqrt{2(1-t^2)}}\left\{\left(-\frac{z^2}{2(1-t)}+1\right)-\left(\frac{z^2}{2(1+t)}-1\right)\right\}dz=\int_0^{\sqrt{2(1-t^2)}}\left\{-\frac{2z^2}{1-t^2}+4\right\}dz$$

$$=\left[-\frac{2z^3}{3(1-t^2)}+4z\right]_0^{\sqrt{2(1-t^2)}}$$

$$=\boldsymbol{\frac{8\sqrt{2}}{3}\sqrt{1-t^2}}$$

(2) V_1 の表面を表す不等式

$$\begin{cases} 0\leqq x+y\leqq 2\ \text{かつ}\ z^2+2x+2y-2xy-2=0 \\ -2\leqq x+y<0\ \text{かつ}\ z^2-2x-2y-2xy-2=0 \end{cases}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

の x に $-y$ を，y に x を代入することで V_2 の表面を表す不等式

$$\begin{cases} 0\leqq -y+x\leqq 2 \text{ かつ } z^2-2y+2x+2yx-2=0 \\ -2\leqq -y+x<0 \text{ かつ } z^2+2y-2x+2yx-2=0 \end{cases}$$

を得る．これに $x=t$ を代入して整理すると

$$\begin{cases} t-2\leqq y\leqq t \text{ かつ } y=\dfrac{z^2}{2(1-t)}-1 \\ t<y\leqq t+2 \text{ かつ } y=-\dfrac{z^2}{2(1+t)}+1 \end{cases} \cdots②$$

となるので，①，②より切り口の共通部分は $y\leqq -\dfrac{z^2}{2(1-t)}+1$ かつ $y\geqq \dfrac{z^2}{2(1-t)}-1$ となり，

$-\dfrac{z^2}{2(1-t)}+1=\dfrac{z^2}{2(1-t)}-1$ より $z=\pm\sqrt{2(1-t)}$ なので，その面積は

$$\int_{-\sqrt{2(1-t)}}^{\sqrt{2(1-t)}}\left\{\left(-\frac{z^2}{2(1-t)}+1\right)-\left(\frac{z^2}{2(1-t)}-1\right)\right\}dz=\left[-\frac{z^3}{3(1-t)}+2z\right]_{-\sqrt{2(1-t)}}^{\sqrt{2(1-t)}}=\frac{8\sqrt{2}}{3}\sqrt{1-t}$$

よって求める体積は

$$2\times\int_0^1\frac{8\sqrt{2}}{3}\sqrt{1-t}\,dt=2\left[-\frac{16\sqrt{2}}{9}(1-t)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\boldsymbol{\frac{32}{9}\sqrt{2}}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。